

# Construction de tables de mortalité prospectives

Philippe Delfosse

*integrale*

*11, Place Saint Jacques. 4 000 Liège*

*E-mail : phj.delfosse@integrale.be*

## 1 Le groupe de travail “Mortalité” de l’A.R.A.B

Pour la première fois depuis une existence presque séculaire, l’Association Royale des Actuaires Belges (A.R.A.B.) a publié des tables de mortalité prospectives.

La législation, les textes réglementaires et la tarification des assureurs se sont jusqu’à présent basés en Belgique sur une approche assez statique de la mortalité. Or la longévité de la population semble en amélioration quasiment continue depuis la fin du XVIII<sup>e</sup> siècle et il peut être raisonnablement supposé que des progrès seront encore observés dans le futur.

Pour les opérations de genre décès où le risque de l’assureur est causé par une mortalité plus importante que celle prévue par son tarif, travailler avec une table construite sur un recensement récent sans tenir compte des évolutions probables entraîne une certaine marge de sécurité cachée. Pour les opérations de genre vie avant l’âge de la retraite, qui sont souvent des assurances de capitaux, les probabilités de survie sont faibles en comparaison du taux de capitalisation et les taux de placement des dernières décennies ont permis de compenser largement les écarts entre les décès observés et les décès attendus.

Les opérations de rente viagère qui contiennent une part de risque viager nettement plus importante n'ont connu que peu de succès ces dernières années. Ceci explique peut-être une certaine passivité de nos actuaires et de nos entreprises d'assurances en comparaison avec les autres pays européens. Des mesures gouvernementales visant à promouvoir la liquidation des avantages provenant des fonds de pension et des assurances de groupe, l'introduction de la notion de fair-value dans de futures normes internationales et le niveau faible des taux de placement des emprunts d'Etat par rapport au taux technique (ou taux de capitalisation) devraient conduire à une tarification plus précise du risque de longévité pour les rentes viagères.

C'est dans ce contexte que l'Association Royale des Actuaires Belges a décidé de constituer un groupe de travail "Mortalité" chargé d'établir des tables de mortalité prospectives.

Après examen des différentes méthodes disponibles, deux méthodes ont été retenues: l'une développée avec l'UCL se base sur un modèle Poisson log-bilinéaire, l'autre consistant à projeter les paramètres des modélisations classiques des tables.

Dans les deux cas, les méthodes se bornent à extrapoler les tendances du passé et ne prennent pas en compte des événements nouveaux, tels que l'apparition de nouvelles maladies ou la mise au point de traitements pour des maladies jusqu'à présent incurables.

Les méthodes ont été utilisées sur les statistiques de l'ensemble de la population belge telles qu'elles sont fournies par l'Institut National de Statistique.

Une comparaison avec la survie des rentiers des compagnies d'assurances belges a également été réalisée sur la base des statistiques de l'Office de Contrôle des Assurances.

## 2 Evolution de la mortalité belge

Partant des recensements décennaux, l'Institut National de Statistique dresse régulièrement des tables de mortalité pour l'ensemble de la population du Royaume et plus récemment pour les trois régions. Ces statistiques sont disponibles par sexe. Ces tables de mortalité

donnent l'évolution d'une population théorique de 1.000.000 nouveaux-nés en supposant que le nombre de survivants à chaque âge est obtenu en appliquant les probabilités de décès observés sur la population concernée pendant la période d'observation.

Le nombre de survivants d'âge  $x$  est notée traditionnellement  $l_x$ , avec

$$l_0 = 1.000.000$$

et

$$l_x = l_{x-1} \cdot q_{x-1}$$

Dans cette expression,  $q_x$  est la probabilité pour un individu d'âge  $x$  de décéder au cours de l'année.

A l'aide de ces tables de mortalité, l'espérance de vie à l'âge  $x$  peut être calculée : il s'agit d'une estimation du nombre moyen d'années restant à vivre pour un individu d'âge  $x$ . Cette estimation, à manipuler avec les précautions nécessaires, fournit une information résumée sur la longévité de la population concernée et est utilisée en général par les journalistes ou par certains auteurs dans un but de vulgarisation.

Le Tableau 1 reprend l'évolution de l'espérance de vie à la naissance et à 65 ans telle que reflétée par les tables périodiques dressées par l'Institut National de Statistique (de 1880-1890 à 1997-1999). On constate les spectaculaires améliorations de la mortalité au cours du 20<sup>e</sup> siècle : si à la fin du 19<sup>e</sup> siècle un nouveau-né pouvait espérer vivre 43.3 ans ou 46.5 ans, selon qu'il était de sexe masculin ou féminin, un siècle plus tard, son espérance atteint 74.8 et 81.2 ans. De même, un travailleur atteignant l'âge de 65 ans et cessant ses activités professionnelles peut espérer profiter de sa pension 15.6 ans (contre 19.9 ans pour une travailleuse) fin du 20<sup>e</sup> siècle, alors que leurs survies moyennes n'excédaient pas 10.7 et 11.6 ans un siècle plus tôt.

Espérances de vie à la naissance<sup>1</sup>

Période	Hommes	Femmes
1880-1890	43.29	46.51
1928-1932	56.03	59.80
1946-1949	62.03	67.26
1959-1963	67.15	73.18
1968-1972	67.78	74.20
1979-1982	70.03	76.80
1988-1990	72.42	79.12
1991-1993	72.99	79.77
1994-1996	74.06	80.75
1997-1999	74.76	81.17

Espérances de vie à 65 ans

Période	Hommes	Femmes
1880-1890	10.67	11.60
1928-1932	11.42	12.56
1946-1949	12.32	13.87
1959-1963	12.43	14.83
1968-1972	12.09	15.28
1979-1982	12.94	16.91
1988-1990	14.02	18.30
1991-1993	14.50	18.79
1994-1996	15.21	19.58
1997-1999	15.62	19.85

### 3 Approches transversale et longitudinale

La façon de déterminer la table de mortalité décrite au point précédent relève d'une vision statique et repose sur l'hypothèse que la mortalité est figée. Pour déterminer l'espérance de vie d'un nouveau-né, on utilise, entre autres, la probabilité de survie à 25 ans obtenue en observant la mortalité de la génération de son père et la probabilité de survie à 52 ans déterminée sur la base des décès des contemporains de son grand-père. C'est cette approche transversale qui a été utilisée jusqu'à présent pour la tarification en Belgique et qui est reprise dans

---

<sup>1</sup>Selon les tables de l'Institut National de Statistique

la législation et les textes réglementaires. Cette approche transversale, si elle est favorable à la sécurité des opérations en cas de décès pour un assureur, est en contradiction avec les observations telles que données dans le Tableau 1 et avec les connaissances du grand public qui a lu ou entendu que " chaque année, nous gagnons une saison de vie ". Une vision plus dynamique est possible en estimant la mortalité des individus non seulement en fonction de l'âge atteint mais également en fonction de leur année de naissance.

Dans cette approche longitudinale, le nombre de survivants d'âge  $x$  nés au cours de l'année  $n$  peut être notée  $l_x(x+n)$ , avec

$$l_0(n) = 1.000.000$$

et

$$l_x(x+n) = l_{x-1}(x+n-1) \cdot q_{x-1}(x+n-1)$$

où  $q_x(t)$  est la probabilité pour un individu d'âge  $x$  au cours de l'année  $t$  de décéder au cours de l'année  $[t, t+1[$ .

## 4 Modèle de Poisson log-bilinéaire

Ces tables longitudinales formées par les  $l_x(t)$  ne sont données par l'observation qu'après le décès du dernier survivant des individus nés l'année  $t$ , pour les autres cas concernant des individus vivants qui sont les seuls utiles dans la pratique des assurances, il y a donc lieu d'estimer les probabilités de décès dans le futur.

### 4.1 Modèle

Pour ce faire, la méthode développée par DENUIT, BROUHNS et VERMUNT a été utilisée. Les taux instantanés de mortalité relatifs à l'âge  $x$  et à l'année  $t$  s'expriment au moyen de trois éléments :

$$\mu_x(t) = e^{(\alpha_x + \beta_x \cdot \square_t)}$$

où  $\alpha_x$  décrit le comportement moyen des  $\mu_x(t)$  au cours du temps (en échelle logarithmique) et où  $\beta_x$  décrit (toujours en échelle logarithmique) l'écart des  $\mu_x(t)$  par rapport au comportement moyen  $\alpha_x$ . Les âges  $x$  pour lesquels  $\beta_x$  est grand seront donc très sensibles à l'évolution temporelle. Si les  $\square_t$  sont (approximativement) linéaires,

les taux de mortalités instantanés  $\mu_x(t)$  présentent une décroissance exponentielle à un taux constant.

La série  $\square_t$  décrit l'évolution de la mortalité au cours du temps. La création de tables prospectives n'entraîne donc que l'étude d'une seule série chronologique univariée.

Pour obtenir une modélisation unique (i.e. un modèle identifiable), on impose que la somme des  $\beta_x$  soit égale à 1 et la somme des  $\square_t$  nulle.

Rappelons que moyennant une hypothèse classique sur la mortalité en cours d'année, le lien entre le taux de mortalité instantané et la probabilité de décès au cours de l'année est donné par

$$\mu_x(t) = -\ln(1 - q_x(t))$$

Pour l'estimation des paramètres à partir des données brutes, il est supposé que le nombre de décès observés d'âge  $x$  au cours de l'année  $t$  est distribué comme une Poisson de moyenne  $(\mu_x(t) \cdot L_{x,t})$  où  $L_{x,t}$  est le nombre de personnes exposées au risque, soit d'âge  $x$  au cours de l'année  $t$ .

Les estimations du maximum de vraisemblance des paramètres  $\alpha_x, \beta_x$  et  $\square_t$  doivent être obtenues à l'aide d'un algorithme itératif compte tenu de la présence du terme bilinéaire  $\beta_x \cdot \square_t$ .

Il peut être remarqué que cette méthode, à la différence d'autres, n'impose pas que toutes les données soient disponibles pour tous les âges et toutes les années considérés, ce qui peut être utile quand on utilise les statistiques de l'INS pour les âges très élevés.

Les paramètres  $\alpha_x, \beta_x$  et  $\square_t$  ayant été obtenus pour des valeurs de  $t < 2001$ , il reste à analyser la série chronologique des  $\square_t$  pour extrapoler les valeurs de  $\square_t$  pour  $t > 2000$  en utilisant les méthodes de Box et Jenkins.

Il est ensuite élémentaire de constituer des tables de mortalité prospectives et de comparer les espérances de vie obtenues par l'approche transversale et l'approche longitudinale.

## 4.2 Données utilisées et limites

Les tables de mortalité prospectives de l'ARAB sont obtenues en se basant sur les données de l'INS de 1950 à 2000. Reprendre des observations plus anciennes poserait un double problème : d'une part, les décès relevés dans l'immédiat après-guerre s'écartent des données précédentes et suivantes et d'autre part, les progrès de la médecine (par exemple, la mise au point des sulfamides et des antibiotiques) ont modifié de façon significative la mortalité. Reprendre des données antérieures doit se faire avec précaution sous peine de surestimer l'amélioration de la longévité.

Les projections dans le temps ont été limitées à l'année 2070, les estimations à très long terme des taux instantanés de mortalité présentant beaucoup d'incertitude et n'ayant que peu d'application pratique immédiate pour le calcul des opérations de rentes.

Pour la mortalité des âges élevés, la modélisation devient plus hasardeuse, il faut convenir que le nombre d'observations est également singulièrement réduit. Un modèle spécifique pourrait être développé. Certains actuaires proposent de fermer la table en posant à un âge donné une probabilité de décès égale à 1. Pour les tables ARAB, les probabilités de décès sont supposées constantes à partir de 93 ans pour les hommes et de 94 ans pour les femmes. Cette hypothèse est prudente et a relativement peu d'influence, compte tenu de l'actualisation, sur le calcul du prix d'une rente viagère aux âges les plus fréquents de souscription, soit entre 50 et 70 ans.

## 5 Comparaison des espérances de vie suivant l'approche transversale et longitudinale

En utilisant les tables prospectives de l'ARAB réalisées sous la direction du professeur DENUIT, les espérances de vie peuvent être recalculées suivant les approches transversale ou traditionnelle et longitudinale. On constate que l'espérance de vie calculée traditionnellement et répandue dans les médias sous-estime largement la longévité des Belges. A titre d'exemple, un nouveau-né masculin pouvait espérer vivre 74.5 ans sur la base des données récoltées en 2000 par l'INS. Si on tient compte de l'évolution probable de la mortalité, il pourra

en fait espérer vivre 81 ans. Pour les femmes, ces chiffres passent respectivement à 81 et 89.2 ans.

Espérances de vie à la naissance en fonction de l'année de naissance, entre parenthèses, les espérance de vie obtenues par la méthode traditionnelle

Année	Hommes	Femmes
1950	71.93 (64.82)	79.99 (69.91)
1955	73.42 (66.47)	81.55 (71.73)
1960	74.28 (67.00)	82.62 (72.62)
1965	75.01 (67.33)	83.58 (73.45)
1970	75.63 (67.36)	84.35 (73.74)
1975	76.54 (68.02)	85.29 (74.64)
1980	77.70 (69.47)	86.31 (76.16)
1985	78.64 (70.62)	87.20 (77.57)
1990	79.62 (72.39)	88.03 (79.20)
1995	80.28 (73.24)	88.66 (80.09)
2000	80.93 (74.47)	89.23 (80.78)

Espérances de vie à 65 ans en fonction de l'année au cours de laquelle l'âge de 65 ans est atteint, entre parenthèses, les espérance de vie obtenues par la méthode traditionnelle

Année	Hommes	Femmes
1950	12.11 (11.98)	14.60 (13.72)
1955	12.12 (12.11)	14.98 (14.23)
1960	12.09 (11.93)	15.36 (14.44)
1965	12.19 (12.01)	15.90 (14.28)
1970	12.52 (11.96)	16.62 (15.06)
1975	13.01 (12.06)	17.45 (15.51)
1980	13.62 (12.61)	18.25 (16.37)
1985	14.26 (13.08)	18.98 (17.20)
1990	14.85 (14.00)	19.60 (18.29)
1995	15.34 (14.42)	20.14 (18.85)
2000	15.79 (15.04)	20.67 (19.31)

## 6 Projection des paramètres de modèles classiques

Au sein du groupe de travail "Mortalité" de l'A.R.A.B., M. Kurt LAMBRECHTS a présenté une méthode basée sur la projection des paramètres pour les modèles de MAKEHAM et d'HELIGMAN-POLLARD. L'idée est de réaliser des ajustements de chaque ensemble de données brutes pour déterminer les paramètres du modèle correspon-



nant et sur la base des jeux de paramètres obtenus de définir une loi d'évolution en fonction du temps de ces paramètres afin de permettre des extrapolations.

### 6.1 Modèle de MAKEHAM

La méthode de MAKEHAM malgré ses défauts reste la méthode utilisée pour définir les tables de mortalité officielles dans la réglementation applicable en Belgique. Elle est basée sur la formule suivante :

$$\mu_x(n) = A_n + B_n \cdot (c_n)^x$$

où  $n$  est l'année d'observation des données brutes.

Détaillons l'ajustement pour la population des femmes. Pour les tables de mortalité de la population féminine, la modélisation suivante est obtenue :

- $A_n$  est constante et égale à 0,00031
- $B_n$  est donnée par l'exponentielle :  $4,32021 \cdot 10^{32} \cdot (0.9572217)^n$
- $c_n$  a une forme polynomiale :

$$8.989971 - 0,0083251 \cdot n - 2.1950 \cdot 10^{-6} \cdot n^2$$

On en déduit les probabilités de décès  $q_x$  par la formule classique :

$$q_x = 1 - s \cdot g^{c^x \cdot (c-1)}$$

où  $g = e^{\frac{-B_n}{\ln(c_n)}}$  et  $s = e^{-A_n}$ .

Pour les tables de mortalité de la population masculine, la modélisation suivante est retenue :

- $A_n$  est linéaire et égale à  $0,011377 - 0,0000053446 \cdot n$
- $B_n$  est donnée par l'exponentielle :  $1,6627500 \cdot 10^{32} \cdot (0.9693792)^n$
- $c_n$  a également une forme linéaire :  $0.27453767 + 0.000420 \cdot n$

Les probabilités de décès sont obtenues moyennant une formule légèrement différente de la formule classique :

$$\frac{q_x}{1 - q_x} = 1 - s \cdot g^{c^x \cdot (c-1)}$$

où  $g = e^{\frac{-B_n}{\ln(c_n)}}$  et  $s = e^{-A_n}$ .

## 6.2 Modèle de HELIGMAN-POLLARD

La formule d'Heligman-Pollard est une généralisation de la loi de Makeham avec des paramètres supplémentaires pour tenir compte de la mortalité infantile et de la bosse des accidents :

$$\frac{q_x}{1 - q_x} = A^{(x+B)^C} + De^{-E(\ln x - \ln F)^2} + GH^x$$

M. Kurt LAMBRECHTS prend pour  $G$  et  $H$  les valeurs obtenues par les paramètres  $B$  et  $c$  dans l'ajustement de Makeham des mêmes données brutes et détermine ensuite les autres constantes de la formule. Pour définir l'évolution des paramètres dans le temps on a recours aux mêmes types de modélisation linéaire, polynomiale ou exponentielle.

## 6.3 Résultats

Espérances de vie à l'âge de 65 ans selon la version Longitudinale : en fonction de l'année au cours de laquelle l'âge de 65 ans est atteint.

### Hommes

Année	ARAB	Makeham	H.-P.
1980	13.62	14.49	15.22
1985	14.26	14.57	15.31
1990	14.85	14.65	15.39
1995	15.34	14.74	15.47
2000	15.79	14.82	15.56

### Femmes

Année	ARAB	Makeham	H.-P.
1980	18.25	20.36	20.90
1985	18.98	20.81	21.35
1990	19.60	21.18	21.73
1995	20.14	21.49	22.04
2000	20.67	21.73	22.29

## 6.4 Données utilisées et limites

La modélisation a été faite sur les tables de mortalité brutes provenant des recensements décennaux depuis la table 1880-1890. Un essai sur

les données brutes annuelles de l'INS ne donne pas d'amélioration significative aux modèles. Les paramètres ont été estimés en utilisant les programmes SAS.

On constate que les espérances de vie projetées sont nettement différentes, le fait de partir de la fin du XIXe siècle plutôt que de 1950 pour l'estimation de l'évolution future n'y est pas vraisemblablement pas étranger.

Il faut également remarquer qu'avec la double exponentielle des formules de Makeham et d'Heligman-Pollard, les paramètres obtenus lors de l'ajustement sont fortement liés entre eux. Une certaine prudence est donc nécessaire dans l'interprétation des résultats.

Il est inutile de rappeler que l'interprétation classique des paramètres de Makeham, mortalité accidentelle et mortalité liée au vieillissement, ainsi que les considérations sur la bosse des accidents valables pour une table donnée perdent beaucoup de leur pertinence dans une vision longitudinale où les paramètres changent à chaque âge.

## 7 Antisélection des rentiers

Les assureurs en sont bien conscients : la mortalité des rentiers qui font le choix de souscrire une rente viagère est nettement inférieure à celle de la population globale. Le simple bon sens nous apprend que seuls des assurés en bonne santé (ou pensant l'être) concluent ce type de contrat. D'autres facteurs liés à la catégorie socio-professionnelle des souscripteurs interviennent également.

Les statistiques que l'OCA a mis à la disposition du groupe de travail "Mortalité" de l'A.R.A.B. portent sur cinq ans et ne permettent pas d'utiliser les méthodologies précédentes. BROUHNS et DENUIT ont mis en évidence une relation particulièrement simple entre les taux instantanés de mortalité de la population totale belge provenant des données de l'INS et ceux de la population des rentiers obtenus à partir des statistiques transmises par l'OCA pour les âges à partir de 50 ans :

$$\ln\mu_x^{OCA}(t) = \delta + \gamma.\ln\mu_x^{INS}(t)$$

avec les valeurs suivantes :

	$\delta$	$\gamma$
Hommes	-1,5013	0,7975
Femmes	-1.2811	0,8486

Si l'on se réfère à une pratique couramment utilisée par les assureurs dans le passé, il faudrait, aux âges les plus courants de tarification, calculer les primes uniques de rentes viagères avec un rajeunissement de 9 ans.

## 8 Conclusion

La longévité est en progrès : les deux modèles le montrent clairement, même si les résultats diffèrent quelque peu. Une tarification équilibrée des rentes viagères impose donc de tenir compte de cette amélioration par l'usage de tables prospectives ou par l'adoption d'un coefficient de sécurité. Le phénomène d'antiselection est extrêmement important et ne devrait pas être négligé lors de la souscription de contrats de rentes à titre individuel ou lors de la liquidation de contrats sous forme de rente si le bénéficiaire a le choix entre la perception du capital ou d'une rente.

## Bibliographie

- [1] BROUNS, N., DELWART, A. et DENUIT, M. (2002) : *Elaboration de tables de mortalité prospectives ou comment tarifer des rentes viagères lorsque la mortalité évolue*. CD-ROM ARAB.
- [2] LAMBRECHTS, K. (2002) : *Belgische sterftetfels van vorige tot volgende eeuw*. CD-ROM ARAB