CALCULS DE TAUX ACTUARIELS

Une démonstration de l'algorithme de Jaumain

Jacques Bair et Daniel Justens

1 Introduction

1.1 Dispositions européennes

La nécessité d'harmoniser les différentes propositions de crédit dans la communauté européenne a conduit le Conseil des Communautes Européennes à arrêter la *Directive 90/88/CEE* du 22 février 1990 relative au rapprochement des dispositions législatives, réglementaires et administratives des Etats membres en matière de crédit à la consommation. (Journal Officiel des Communautés L16 du 10 mars 1990).

Sans entrer dans le détail des notations de cette directive, signalons que l'équation de base imposée est notre équation d'équilibre. La législation belge est particulièrement intéressante en ce sens qu'elle introduit empiriquement des résultats peu répandus et que nous devrons utiliser dans la suite.

1.2 Un cas intéressant : la législation belge

Le législateur belge a tenté à plusieurs reprises de définir de manière cohérente le taux d'intérêt réel d'une opération financière. Dans le moniteur du 2 octobre 1974, il a défini le *taux de chargement annuel réel*, en abrégé TCAR en se basant sur un raisonnement linéaire élémentaire (et par conséquent inexact). Nous avons montré[1] que les relations présentées n'étaient que de grossières approximations basées sur des développements mathématiques contradictoires.

[1] Voir [18] pages 116 et suivantes et aussi pages 215 et suivantes.

Le *Moniteur Belge* du 8 septembre 1992 (pages 19 525 à 19 544) présente de nouveaux résultats intéressants mais nécessitant quelques explications complémentaires. Le premier point est positif : les résultats avancés sont mathématiquement corrects, ce qui par rapport à l'arrêté du 2 octobre 1974 constitue un progrès remarquable. La structure mathématique sous-tendant ces résultats est hélas! mal connue et ne fait l'objet que d'une diffusion restreinte. Nous avons établi plusieurs résultats généraux permettant de comprendre et justifier les formules avancées dans le Moniteur dont nous reprenons ici les grandes lignes[2].

2 Le texte du moniteur

Pour la première fois, un texte de loi établit en règle absolue le principe de base de la mathématique financière :

Egalité des flux opposés actualisés.

Nous reprenons ici le texte intégral de l'article 4 définissant de manière correcte le *taux annuel effectif global* en abrégé $TAEG$, à la base de toute transaction financière. Les commentaires additifs de notre cru sont en italique.

ART 4. 1er. L'équation de base qui, conformément à l'article 3, premier alinéa du présent arrêté définit le taux annuel effectif global en exprimant l'égalité entre d'une part la somme des valeurs actualisées des prélèvements de crédit et d'autre part, la somme des valeurs actualisées des montants des termes est la suivante :

$$\sum_{K=1}^{m} \frac{C_K}{(1+x)^{t_K}} = \sum_{L=1}^{m'} \frac{D_L}{(1+x)^{s_L}}$$

où:

- m désigne le numéro d'ordre du dernier prélèvement de crédit.
- K désigne le numéro d'ordre d'un prélèvement de crédit,
  soit $1 \leq K \leq m$.
- C_K désigne le montant du prélèvement de crédit numéro K.

[2] Voir [3], [4] et [5].

- t_K désigne l'intervalle de temps, exprimé en années et fractions d'années, entre la date du prélèvement de crédit numéro 1 et celle du prélèvement de crédit numéro K.
- $\sum$ désigne le signe de sommation.
- m' désigne le numéro d'ordre du dernier montant d'un terme.
- L désigne le numéro d'ordre d'un montant d'un terme,
soit $1 \leq L \leq m'$
- D_L désigne le montant du terme L.
- s_L désigne l'intervalle exprimé en années et fractions d'années, entre la date du prélèvement de crédit numéro 1 et celle du montant du terme numéro L.
- x désigne le taux annuel effectif global.

On peut regretter un certain manque de convivialité dans les notations, mais on ne peut qu'applaudir à l'adoption d'un principe de base correct. Le problème du calcul du TAEG x est abordé dans la suite de l'arrêté.

Comme le prétend le Moniteur, l'équation de base de l'article 4 1er, qui définit le taux annuel effectif global n'est, en général, pas susceptible d'une résolution algébrique dès que le nombre de termes (m') est supérieur à 4.

On peut remarquer ici que c'est le nombre de termes des deux membres (m et m') qui doit être inférieur ou égal à 4 pour que l'on puisse envisager une résolution algébrique. De plus, ces considérations ne concernent bien entendu que les échéances naturelles, alors que la méthode décrite s'applique à des problèmes beaucoup plus généraux prenant en compte des échéances quelconques.

Plusieurs méthodes itératives peuvent être utilisées pour la détermination du taux annuel effectif global, notamment la suivante :

$$C = \sum_{K=1}^{m} C_K \qquad D = \sum_{L=1}^{m'} D_L$$

où C désigne la somme arithmétique des montants de prélèvement de crédit et D désigne la somme arithmétique des montants des termes.

Première itération :

$$p_1 = \frac{\sum_{K=1}^{m} C_K t_K}{C} \qquad q_1 = \frac{\sum_{L=1}^{m'} D_L s_L}{D} \tag{1}$$

p_1 représente la somme des échéances négatives pour l'organisme financier pondérée par l'amplitude des flux financiers. On vérifie que la somme des poids associés aux t_K est égale à 1. De même, q_1 représente la somme des échéances positives pour l'organisme financier, pondérée par l'amplitude de ces flux. Les deux relations conduisent à la notion linéaire d'échéance moyenne.

On obtient une première valeur approchée de x :

$$i_1 = \left[\frac{D}{C}\right]^{\frac{1}{q_1 - p_1}} - 1$$

On vérifie que cette relation est équivalente à :

$$C(1+i)^{-p_1} = D(1+i)^{-q_1}$$

On peut l'interpréter comme suit : elle exprime l'égalité des montants cumulés positifs et négatifs calculés aux dates d'échéances moyennes respectives. On a remplacé des successions de versements d'échéances différentes par un seul versement égal en francs courants à la somme de tous les autres, et dont l'échéance moyenne est calculée linéairement.

Deuxième itération

$$p_2 = -\frac{1}{ln(1+i_1)} ln \left[\frac{\sum_{K=1}^{m} \frac{C_K}{(1+i_1)^{t_K}}}{C}\right]$$

$$q_2 = -\frac{1}{ln(1+i_1)} ln \left[\frac{\sum_{L=1}^{m'} \frac{D_L}{(1+i_1)^{s_L}}}{D}\right]$$

où ln désigne le logarithme népérien

On vérifie que le calcul de p_2 équivaut à :

$$C(1+i_1)^{-p_2} = \sum_{K=1}^{m} \frac{C_K}{(1+i_1)^{t_K}}$$

qui exprime l'égalité entre :

- *la valeur actuelle du montant C égal à la somme des montants empruntés calculé à l'échéance p_2*
- *la valeur actuelle des montants empruntés*

les deux étant calculés au même taux.

Des considérations identiques peuvent être faites pour les remboursements et le calcul de q_2. On remplace une succession de versements par un "versement-somme" unique d'échéance moyenne (p_j ou q_j) fonction du taux d'actualisation.

On obtient une deuxième valeur approchée de x :

$$i_2 = \left[\frac{D}{C}\right]^{\frac{1}{q_2 - p_2}} - 1$$

et ainsi de suite. La suite $i_1, i_2, \ldots, i_j, \ldots$converge généralement vers la solution x de l'équation de base.

On remarque que la détermination de i_2 (respectivement de i_j) s'obtient à partir de p_2 et q_2 (resp. de p_j et q_j) tout comme p_2 et q_2 (resp. p_j et q_j) avaient été obtenus à partir de i_1 (resp. i_{j-1}). La méthode du législateur belge consiste donc à remplacer une succession de capitaux quelconques d'échéances quelconques par un "capital-somme" d'échéance à déterminer. On construit 3 suites à savoir :

$$p_1, q_1 \to i_1 \to p_2, q_2 \to \ldots \to p_j, q_j \to i_j \to \ldots$$

La démonstration mathématique de la convergence est non triviale. Elle ne se fait que dans un cas particulier mais qui couvre la presque totalité des éventualités. Nous y consacrons le paragraphe qui suit.

3 Support mathématique

3.1 Introduction

De nombreux problèmes de mathématique financière se ramènent à la résolution d'une équation du type :

$$\sum_{k=1}^{n} b_k x^k = C \tag{2}$$

où C et b_k désignent des constantes positives avec $\sum_{k=1}^{n} b_k = 1$.

Il convient de donner plusieurs propriétés intéressantes relatives à la moyenne pondérée des premières puissances d'un nombre réel positif. Ces résultats permettent d'étudier l'existence et l'unicité de la solution de l'équation (2) et de mieux comprendre l'algorithme livrant rapidement une approximation de la solution. Cette méthode itérative, qui a été présentée sans démonstration ni support mathématique par Jaumain et décrite, toujours sans justification théorique, par le Moniteur Belge du 8 septembre 1992, à propos du calcul du TAEG, est exposée rigoureusement d'un point de vue analytique avec une interprétation géométrique; la convergence de la méthode est prouvée sous des hypothèses satisfaisantes dans de nombreuses applications en univers réel.

3.2 Notations et propriétés de moyennes pondérées de puissances

Dans la suite, pour tout réel positif x et pour tout naturel n, nous notons $M_n(x)$ la moyenne pondérée :

$$M_n(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k x^k \quad avec \quad \sum_{k=1}^{n} b_k = 1$$

Nous avons recours à la notion classique d'élasticité de f au point x. Nous la notons:

$$Ef(x) = \frac{xf'(x)}{f(x)}$$

et posons

$$\nu = \sum_{k=1}^{n} kb_k$$

ν représente la moyenne pondérée des exposants, obtenue en utilisant les mêmes coefficients que pour la somme $M_n(x)$. Nous appellerons ν puissance moyenne linéaire associée à $M_n(x)$.

3.3 Propriétés de $M_n(x)$

Propriété P1. Le produit de deux moyennes pondérées de degrés n et m et de puissances moyennes linéaires associées μ et ν est une moyenne pondérée de degré $n+m$ dont le terme de degré 1 est toujours nul.

Preuve. Notons

$$M_n(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k x^k \qquad \text{et} \qquad M_m(x) = \sum_{j=1}^{m} a_j x^j$$

Le produit peut s'écrire

$$M_{n+m}(x) = \sum_{k=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{m} a_j x^j \right] b_k x^k$$

dont la somme des coefficients vaut

$$\sum_{k=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{m} a_j \right] b_k = \sum_{k=1}^{n} b_k = 1$$

Propriété P2. Sous les mêmes hypothèses et notations, la puissance moyenne linéaire associée au produit est égale à la somme des puissances moyennes linéaires.

Preuve. On calcule :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{m} a_j b_k (j+k) \right] &= \sum_{k=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{m} a_j b_k j \right] + \sum_{k=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{m} a_j b_k k \right] \\
&= \sum_{k=1}^{n} b_k \left[\sum_{j=1}^{m} a_j j \right] + \sum_{k=1}^{n} k b_k \left[\sum_{j=1}^{m} a_j \right] \\
&= \mu + \nu
\end{aligned}$$

Propriété P3. Pour tout réel positif x différent de 1, on a :

$$M_n(x) > x^\nu$$

Preuve. Comme le logarithme népérien est une fonction strictement concave sur R_0^+, l'inégalité de Jensen permet d'écrire pour des réels positifs non tous égaux $a_1, \ldots, a_n$:

$$ln\{\sum_{k=1}^{n} b_k a_k\} > \sum_{k=1}^{n} b_k ln(a_k) = ln\{\prod_{k=1}^{n} a_k^{b_k}\}$$

L'on en déduit en posant $a_k = x^k$ pour $k = 1, \ldots, n$:

$$lnM_n(x) > ln[x^{\{\sum_{k=1}^{n} kb_k\}}] = ln\{x^\nu\}$$

D'où la thèse en vertu du caractère strictement croissant du logarithme népérien.

3.3.1 Propriétés de l'élasticité

Propriété P4. La fonction $M_n(x)$ est strictement croissante et strictement convexe sur $[0, +\infty[$. La fonction $EM_n(x)$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

Preuve. Pour tout réel x positif, $M_n'(x) > 0$ et $M_n''(x) > 0$. Montrons par récurrence sur n que la dérivée de $EM_n(x)$ est positive pour tout $x > 0$. Le résultat est vrai pour $n = 2$. En effet :

$$EM_2(x) = \frac{xM_2'(x)}{M_2(x)} = \frac{b_1x + 2b_2x^2}{b_1x + b_2x^2}$$

$$EM_2'(x) = [\frac{b_1x + 2b_2x^2}{b_1x + b_2x^2}]' = \frac{b_1b_2x^2}{(b_1x + b_2x^2)^2} > 0$$

Supposons à présent la propriété vraie pour $(n-1)$ et vérifions qu'elle est encore vraie pour n. Posons pour simplifier :

$$A = \sum_{k=1}^{n-1} kb_kx^k$$

$$B = \sum_{k=1}^{n-1} b_kx^k$$

On a alors :

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} kb_kx^k}{\sum_{k=1}^{n} b_kx^k} = \frac{A + nb_nx^n}{B + b_nx^n}$$

Calculons :

$$\left[\frac{A + nb_nx^n}{B + b_nx^n}\right]' =$$

$$\frac{A'B - AB' + A'b_nx^n + n^2b_nx^{n-1}B - Anb_nx^{n-1} - B'nb_nx^n}{[B + b_nx^n]^2}$$

Il reste à vérifier le caractère strictement positif de

$$R = A'b_nx^n + n^2b_nx^{n-1}B - Anb_nx^{n-1} - B'nb_nx^n$$

On calcule :

$$\begin{aligned} R &= b_n x^{n-1}[x \sum_{k=1}^{n-1} k^2 b_k x^{k-1} + n^2 \sum_{k=1}^{n-1} b_k x^k \\ &- \sum_{k=1}^{n-1} nkb_k x^k - x \sum_{k=1}^{n-1} nkb_k x^{k-1}] \\ &= b_n x^{n-1}[\sum_{k=1}^{n-1} b_k x^k (k^2 + n^2 - 2nk)] \\ &= b_n x^{n-1}[\sum_{k=1}^{n-1} b_k x^k (n-k)^2] > 0. \end{aligned}$$

3.4 Existence et unicité de solutions

Propriété P5. Si C désigne une constante positive quelconque, l'équation $M_n(x) = C$ possède une et une seule solution x^* dans $]0, +\infty[$. On a $x^* < 1$ (resp. $x^* = 1; x^* > 1$) lorsque $C < 1$ (resp. $C = 1; C > 1$).

Preuve. On vérifie que $M_n(0) = 0, M_n(1) = 1$ et ensuite que $lim_{x \to +\infty} M_n(x) = +\infty$. L'existence d'une solution est garantie par le théorème des valeurs intermédiaires. L'unicité résulte de la stricte croissance de la fonction $M_n(x)$ sur $[0, +\infty[$ (Propriété $P4$).

Théorème 3.1
Si q désigne un réel quelconque de l'intervalle $]1, \nu[$ (resp. $]\nu, n[$), l'équation $M_n(x) = x^q$ possède dans $]0, +\infty[$ une seule solution qui est inférieure (resp. supérieure) à 1. Pour $q \in]0, 1] \bigcup \{\nu\} \bigcup [n, +\infty[$, l'équation $M_n(x) = x^q$ ne possède que la solution 1 dans $]0, +\infty[$.

Preuve. La dernière partie de l'énoncé est évidente vu la propriété $P3$. Nous présentons quelques propriétés élémentaires sous forme de lemmes de façon à alléger la démonstration.

Lemme 3.1. Pour $x \in]0, 1[$ (resp. $x \in]1, +\infty[$), les seules solutions possibles de l'équation $M_n(x) = x^q$ correspondent à des exposants $q \in]1, \nu[$ (resp. $q \in]\nu, n[$).

Preuve. C'est une conséquence de la propriété $P3$. En effet, pour $x \in]0, 1[$ (resp. $x \in]1, +\infty[$) et pour $q \in]\nu, n[$ (resp. $q \in]1, \nu[$), on a $M_n(x) > x^\nu > x^q$.

Lemme 3.2. $\forall q \in]1, \nu[, \exists\, \varepsilon(q)$ tel que

$\forall x \in]0, \varepsilon[$, on a $x^q < M_n(x)$
$\forall x \in]1-\varepsilon, 1[$, on a $x^q > M_n(x)$

Preuve. Il suffit de calculer les pentes en 0 et 1. En posant $f_q(x) = x^q$, on a $\forall q \in]1, \nu[$:
$M_n'(0) = b_1 > f_q'(0) = 0$
$M_n'(1) = \nu > f_q'(1) = q$.

Lemme 3.3. $\forall q \in]\nu, n[, \exists\, \varepsilon(q) > 0$ et $X \in]1, \infty[$ tels que $x^q > M_n(x)$ pour $x \in]1, 1+\varepsilon[$ et $x^q < M_n(x)$ pour $x > X$

Preuve. Il suffit de vérifier que sous nos hypothèses:
$f_q'(1) = q > M_n'(1) = \nu$ et que $lim_{x \to +\infty}[M_n(x) - f_q(x)] = +\infty$.

Toute solution de l'équation $M_n(x) = x^q$ est soit un point de tangence, soit un point de croisement des graphiques de $M_n(x)$ et de x^q, c'est-à-dire un certain point x^* pour lequel les deux courbes ont respectivement même droite tangente ou deux droites tangentes distinctes. En vertu des lemmes 3.2 et 3.3, le théorème des valeurs intermédiaires garantit l'existence d'au moins un point de croisement x^* des graphiques de $M_n(x)$ et de x^q.

Montrons d'abord l'existence d'au plus deux points de croisement. Supposons le contraire et désignons par a, b et c avec $a < b < c$, les trois plus petites des solutions.

On a alors: $M_n(a) = a^q, M_n(b) = b^q$ et $M_n(c) = c^q$. Comme en $x = 0$, la pente de la tangente à la courbe $y = M_n(x)$ est supérieure à celle de $y = x^q$, on doit avoir

$$M_n'(a) < qa^{q-1}, M_n'(b) > qb^{q-1}, M_n'(c) < qc^{q-1}.$$

On en déduit :

$$EM_n(b) > q > EM_n(c)$$

Cette dernière inégalité contredit le caractère strictement croissant de l'élasticité (Propriété P4). D'autre part, 1 est solution triviale de l'équation. Il en résulte l'existence et l'unicité d'un point de croisement entre les deux courbes dans le domaine considéré.

Il reste à montrer l'impossibilité d'avoir un point de croisement unique et un point de tangence. Procédons encore une fois par l'absurde en supposant l'existence d'un point de tangence d strictement inférieur au point de croisement x^*. On vérifie que dans ce cas, $EM_n(d) = q$ alors que $q > EM_n(x^*)$, ce qui contredit encore une fois le caractère strictement croissant de l'élasticité. Envisageons à présent un point de tangence t strictement supérieur x^*. Dans ce cas, en vertu du lemme 1, on a soit $x^* < t < 1$ (lorsque $q \in]1, \nu[$), soit $1 < x^* < t$ (lorsque $q \in]\nu, n[$). Il existe par la continuité de $f_q(x) = f(x, q)$ relativement à x et q, un certain $\varepsilon(q)$ tel que pour $q \in [1, \nu[$ (resp. $q \in]\nu, n[$), on puisse trouver $q' > q$ (resp. $q' < q$) avec

$$\forall x \in]x^* + \varepsilon,\ t - \varepsilon[$$

$$x^{q'} > M_n(x)$$

Comme on a également $M_n(x^*) = x^{*q} > x^{*q'}$ et $M_n(t) = t^q > t^{q'}$, le théorème des valeurs intermédiaires garantit l'existence d'au moins deux points d'intersection entre $M_n(x)$ et $x^{q'}$, ce qui contredit le début de la démonstration.

Corollaire 3.1

Pour tout $x \in]0, 1[\bigcup]1, +\infty[$, on a:

$$x^{EM_n(x)} > M_n(x)$$

Preuve. Considérons tout d'abord le cas d'un réel arbitraire $y \in]0, 1[$. Il résulte des inégalités

$$0 < M_n(y) < y \quad \text{et} \quad M_n(y) > y^{\nu}$$

que $q = log_y M_n(y) \in]1, \nu[$. Comme l'équation $M_n(x) = x^q$ ne possède que la solution y dans $]0,\ 1[$ (Théorème 3.1), et qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $x^q < M_n(x)\ \forall\ x \in]0, \varepsilon[$ (Lemme 3.2), l'examen des pentes, en y, des tangentes aux courbes x^q et $M_n(x)$ permet d'affirmer que

$$qy^{q-1} > \frac{d}{dx} M_n(x) \mid_y$$

On en tire $q > EM_n(y)$ et donc

$$y^q = M_n(y) < y^{EM_n(y)}$$

Soit un réel quelconque $z \in]1, +\infty[$. De $z^{\nu} < M_n(z) < z^n$, on déduit que $r = log_z M_n(z) \in]\nu, n[$. Comme l'équation $M_n(x) = x^r$ ne possède que la solution z dans $]1, +\infty[$ (Théorème 3.1) et qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $x^r > M_n(x) \forall\, x \in]1, 1+\varepsilon[$ (Lemme 3.3), on a :

$$rz^{r-1} < \frac{d}{dx} M_n(x) \mid_z$$

On en tire $r < EM_n(z)$ et donc

$$z^r = M_n(z) < z^{EM_n(z)}$$

Corollaire 3.2

Pour toute constante positive C, la fonction

$$\varphi(x) = C^{log_{M_n(x)} x}$$

est strictement décroissante sur R_0^+ lorsque $C > 1$ et strictement croissante sur R_0^+ lorsque $C < 1$.

Preuve. On calcule

$$\frac{f'(x)}{lnC} = \frac{f(x)}{xln^2 M_n(x)} \left[ln(M_n(x)) - ln\left(x^{EM_n(x)}\right) \right] < 0$$

3.5 Points fixes

Soit C une constante positive différente de 1. Nous étudions la fonction

$$\varphi : x \in]0, +\infty[\backslash \{1\} \to \varphi(x) = C^{\frac{lnx}{lnM_n(x)}} = C^{log_{M_n(x)} x}$$

Lemme 3.4
Pour tout $x \in]0, +\infty[\backslash \{1\}$, on a l'inégalité

$$x^{EM_n(x)} > M_n(x) > x^{\nu}$$

De plus, si $x > 1, x^n > x^{EM_n(x)}$.

Preuve. La première partie de l'énoncé est connue (Propriété P3 et Corollaire 3.1). La seconde découle de la stricte croissance de la fonction $EM_n(x)$ sur $]0, +\infty[$ (Propriété P4) et des égalités

$$EM_n(1) = \nu$$

et

$$lim_{x\to+\infty} EM_n(x) = n$$

Proposition 3.1
Les solutions de l'équation $M_n(x) = C$ dans $]0, +\infty[$ coïncident avec les points fixes de la fonction φ.

Preuve. Soit x^* un point arbitraire de $]0, +\infty[\backslash\{1\}$. L'équation $x^* = \varphi(x^*)$ équivaut à

$$ln(x^*) = \frac{lnC.ln(x^*)}{ln(M_n(x^*))}$$

ou encore à $lnM_n(x^*) = lnC$, ce qui revient à $M_n(x^*) = C$.

Corollaire 3.3
La fonction φ possède un seul point fixe ξ dans $]0, +\infty[\backslash\{1\}$. De plus, on a $\xi \in]0, 1[$ pour $C \in]0, 1[$ et $\xi \in]1, +\infty[$ pour $C \in]1, +\infty[$.

Preuve. La proposition découle directement de l'unicité de la solution de l'équation $M_n(x) = C$ dans les intervalles considérés (Propriété P5).

Lemme 3.5

Soit x^* un point fixe de φ, alors

$$\varphi'(x^*) = 1 - \frac{ln(x^*)}{lnC}.EM_n(x^*)$$

Preuve.

$$\varphi'(x) = \frac{lnC}{ln^2 M_n(x)} \left[\frac{lnM_n(x)}{x} - lnx.\frac{M_n'(x)}{M_n(x)} \right].\varphi(x)$$

pour $x \in]0, +\infty[\backslash\{1\}$. Puisque $x^* = \varphi(x^*)$ et $C = M_n(x^*)$, on en déduit:

$$\varphi'(x^*) = \frac{lnC}{ln^2 C} \left[\frac{lnC}{x^*} - lnx^*.\frac{M_n'(x^*)}{M_n(x^*)} \right].x^* = 1 - \frac{lnx^*}{lnC}.EM_n(x^*)$$

Proposition 2

Lorsque $C < 1$, l'unique point fixe x^* de $\varphi(x)$ est localement stable.

Preuve. L'inégalité $x^{*EM_n(x^*)} > M_n(x^*)$ (Lemme 3.4) entraîne

$$ln\left(x^{*EM_n(x^*)}\right) > lnM_n(x^*)$$

et, comme $x^* \in]0,1[$:

$$0 < \frac{EM_n(x^*)lnx^*}{lnM_n(x^*)} < 1$$

ce qui (Lemme 3.5) permet d'écrire $0 < \varphi'(x^*) < 1$. Le point fixe x^* est donc un équilibre localement stable de la suite définie par l'égalité $x_{j+1} = \varphi(x_j)$ [1; pp 505-506].

Proposition 3

Lorsque $C > 1$ et $\nu > \frac{n}{2}$, l'unique point fixe x^* de φ est localement stable.

Preuve. On sait que $x^* > 1$ (Corollaire 3.3) et que

$$x^{*\nu} < M_n(x^*) < (x^*)^{EM_n(x^*)} < x^{*n}$$

(Lemme 3.4). On en déduit $x^{*2\nu} < M_n^2(x^*)$. On en tire finalement:

$$(x^*)^{EM_n(x^*)} < M_n^2(x^*) \quad \text{et} \quad 1 < \frac{EM_n(x^*)lnx^*}{lnM_n(x^*)} < 2$$

et $-1 < \varphi'(x^*) < 0$. x^* est donc un équilibre localement stable.

Corollaire 3.4

L'unique point fixe de

$$C^{\overline{\frac{lnx}{ln\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x^k\right]}}}$$

est localement stable.

Preuve. Le résultat découle immédiatement des propositions 3.2 et 3.3 ($\nu = \frac{n+1}{2}$).

3.6 Résolution par approximations successives de l'équation $M_n(x) = C$ $(C \in R_0^+ \setminus \{1\})$

3.6.1 Interprétation géométrique

L'idée de base consiste à remplacer la moyenne pondérée $M_n(x)$ par une succession de fonctions du type puissance : $y = x^q$. L'abscisse du point d'intersection du graphe de x^q avec l'horizontale $y = C$ fournit une approximation de x^*. Afin de construire la première approximation, on travaille avec la fonction x^q possédant la même pente que $M_n(x)$ en $x = 1$. On pose donc $q_1 = \nu$ et on note x_1 l'abscisse du point d'intersection de la courbe x^ν avec l'horizontale $y = C$.

On choisit la fonction x^{q_2} unique dont le graphe passe par le point $(x_1, M_n(x_1))$. L'intersection de x^{q_2} avec $y = C$ livre en abscisse la valeur x_2.

De proche en proche, connaissant q_j et x_j, on choisit la fonction $x^{q_{j+1}}$ dont le graphe passe par le point $(x_j, M_n(x_j))$. L'intersection de cette fonction avec l'horizontale $y = C$ donne en abscisse la valeur x_{j+1}.

On constate une différence dans le comportement de la suite de valeurs x_j selon que C est inférieur ou supérieur à 1. Lorsque $C < 1$, la suite décroît vers x^*; lorsque $C > 1$, la suite x_j oscille autour de la solution x^*.

3.6.2 Exposé de la méthode

Pour déterminer l'unique solution x^* de l'équation proposée (Propriété $P5$), on part de la valeur initiale $x_1 = C^{\frac{1}{\nu}}$ obtenue en remplaçant dans l'équation étudiée, la moyenne pondérée $M_n(x)$ par sa puissance moyenne linéaire associée ν. Ensuite on calcule l'exposant q_2 auquel il faut élever x_1 pour retrouver $M_n(x_1)$. On a donc:

$$x_1^{q_2} = M_n(x_1) \quad \text{d'où} \quad q_2 = log_{x_1} M_n(x_1)$$

On construit alors la deuxième approximation x_2 en résolvant

$$x^{q_2} = C.$$

De proche en proche, on définit ainsi les suites q_j et x_j:

$$x_{j-1}^{q_j} = M_n(x_{j-1}) \quad \text{ou} \quad q_j = log_{x_{j-1}} M_n(x_{j-1})$$

$$x_j^{q_j} = C \quad \text{où} \quad x_j = C^{\frac{1}{q_j}}$$

La suite S de ces x_j est en fait solution de l'équation récurrente $x_{j+1} = \varphi(x_j)$. Si S converge, sa limite est un point fixe de φ et coïncide dès lors avec l'unique solution de l'équation $M_n(x) = C$ (Proposition 1). Par ailleurs, notons que la convergence de S est souvent assurée (Corollaire 3.4), notamment dans les problèmes réels rencontrés en mathématique financière.

3.6.3 Démonstration de la convergence de la méthode

Les propositions 3.2 et 3.3 valables localement sont susceptibles d'être démontrées globalement.

Théorème 3.2
Lorsque $C < 1$, la suite construite converge toujours vers la solution x^* de l'équation $M_n(x) = C$. Lorsque $C > 1$ la suite se décompose en deux sous-suites convergentes.

Preuve.

Premier cas : $C < 1$
Notons x^* la solution (unique) de l'équation $M_n(x) = C$. Pour un indice j quelconque, supposons connus les nombres q_j et x_j tels que:

$$1 < q_j < n \qquad x^* < x_j < 1 \qquad M_n(x_j) > C = x_j^{q_j}$$

Ces inégalités sont vérifiées pour $j = 1$. Le nombre

$$q_{j+1} = log_{x_j}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_j^k\right]$$

est compris entre 1 et q_j. En effet, des hypothèses, on déduit:

$$q_{j+1} = log_{x_j}[M_n(x_j)] < log_{x_j}C = log_{x_j}x_j^{q_j} = q_j$$

Par ailleurs, comme $M_n(x_j) < x_j$, on a

$$q_{j+1} = log_{x_j}[M_n(x_j)] > log_{x_j}x_j = 1$$

La suite des q_j étant décroissante et bornée inférieurement, converge vers une limite $\bar{q}$.

Traitons à présent de la suite S des x_j. Le nombre $x_{j+1} = C^{\frac{1}{q_{j+1}}}$ est positif et inférieur à 1. Nous montrons que $x^* < x_{j+1} < x_j$ et que $M_n(x_{j+1}) > C$.

Comme le graphe de $x^{q_{j+1}}$ rencontre celui de $M_n(x)$ en un seul point de $]0,\ 1[$ (Théorème 1), la courbe $y = x^{q_{j+1}}$ est située en-dessous de $y = M_n(x)$ pour $x < x_j$, puisque $M'_n(0) = \frac{1}{n}$. On en tire :

$$M_n(x_{j+1}) > C \qquad \text{et} \qquad x_{j+1} > x^*$$

Des relations

$$q_{j+1} < q_j \qquad x_{j+1} < 1 \qquad C = x_j^{q_j} = x_{j+1}^{q_{j+1}}$$

on déduit

$$C = x_{j+1}^{q_{j+1}} > x_{j+1}^{q_j} \qquad C = x_j^{q_j} > x_{j+1}^{q_j} \qquad x_j > x_{j+1}$$

La suite S étant décroissante et bornée inférieurement converge vers une limite $\bar{x}$. Il reste à prouver que $\bar{x}$ et x^* coïncident. Des égalités $M_n(x_j) = x_j^{q_{j+1}}$ et $x_j^{q_j} = C$, on déduit par passage à la limite,

$$\bar{x}^{\bar{q}} = M_n(\bar{x}) = C$$

Comme l'équation $M_n(x) = C$ possède une seule solution (Propriété P5) on doit avoir:

$$\bar{x} = x^*$$

Deuxième cas : $C > 1$
La propriété P3 nous permet d'affirmer que $x_1 > x^*$. La connaissance des pentes de $M_n(x)$ et de x^{q_2} au point $(1,\ 1)$ et l'unicité de la solution de l'équation $M_n(x) = x^{q_2}$ dans $]1, +\infty[$ nous donnent :

$$1 < x_2 < x^* < x_1 \quad \text{et} \quad x^{q_2} > M_n(x) > x^{\nu} = x^{q_1} \quad \forall x \in]x_2, x_1[$$

ce qui entraîne

$$q_1 < q_3 < q_2$$

En l'abscisse x_2, la pente de $M_n(x)$ est supérieure à celle de x^{q_3}, d'où

$$x_2 < x^* < x_3 \quad x^{q_2} > M_n(x) > x^{q_3} \quad \forall x \in]x_2, x_3[$$

avec

$$q_3 < q_4 < q_2$$

L'abscisse x_4 est dès lors intermédiaire entre x_2 et x^*. Ce raisonnement peut se poursuivre indéfiniment. La suite S est donc scindée en deux sous-suites : celle des x_{2k} (resp. des x_{2k+1}) croissante (resp. décroissante) et bornée supérieurement (resp. bornée inférieurement) par x^*, converge vers une limite $\bar{x}$ (resp $\bar{\bar{x}}$). De même, la suite des q_j se décompose en deux sous-suites: celle des q_{2k} (resp. celle des q_{2k+1}) qui étant décroissante (resp. croissante) et bornée inférieurement par ν (resp. bornée supérieurement par n) converge vers une limite $\bar{q}$ (resp. $\bar{\bar{q}}$). Par passage à la limite, on a

$$\bar{x} \leq x^* \leq \bar{\bar{x}} \quad \bar{\bar{q}} \leq \bar{q} \quad M_n(\bar{\bar{x}}) = \bar{\bar{x}}^{\bar{q}} \quad M_n(\bar{x}) = \bar{x}^{\bar{\bar{q}}} \quad \bar{x}^{\bar{q}} = \bar{\bar{x}}^{\bar{\bar{q}}} = C$$

Si $\bar{x}$ et $\bar{\bar{x}}$ coïncident, la suite S converge vers x^*.

3.7 Applications

3.7.1 Ventes à tempérament et prêts personnels

Nous traitons du cas d'un montant emprunté V remboursé par n versements a_k.

Par hypothèse, on a $\sum_{k=1}^{n} a_k > V$. Le taux d'intérêt réel de la transaction est par définition celui qui permet de réaliser l'équilibre entre flux positifs et négatifs actualisés. Considérons des versements a_k s'échelonnant à intervalles de temps réguliers (unité naturelle du contrat), le premier remboursement a_1 échéant une unité de temps après la signature du contrat. On note i le taux d'intérêt associé à cette unité naturelle de temps. i est l'unique solution strictement positive de l'équation :

$$V = \sum_{i=1}^{k} \frac{a_k}{(1+i)^k}$$

En posant

$$x = (1+i)^{-1}$$

$$C = \frac{V}{\sum_{k=1}^{n} a_k}$$

et

$$b_k = \frac{a_k}{\sum_{k=1}^{n} a_k}$$

on est amené à résoudre l'équation :

$$\sum_{k=1}^{n} b_k x^k = C \quad \text{avec} \quad \sum_{k=1}^{n} b_k = 1$$

où C est une constante positive strictement inférieure à 1: la somme des remboursements étant toujours strictement supérieure au montant emprunté. La méthode exposée au paragraphe précédent fournira donc la valeur du taux associé à l'unité de temps *interversement*. Lorsque cette dernière représente $\frac{1}{m}$ année, on obtient le TAEG (taux annuel effectif global) définit par le législateur belge en utilisant la formule des taux équivalents :

$$TAEG = (1+i)^m - 1$$

A titre d'exemple, examinons le contrat baptisé "10 + 1" proposé par une firme belge. On rembourse la somme V en 11 versements mensuels égaux chacun au dixième de la somme empruntée. On a donc $n = 11$, $a_k = \frac{V}{10}$ et $C = \frac{10}{11}$. Nous allons détailler la méthode au moins en ce qui concerne la première étape. La première échéance moyenne est la moyenne pondérée des échéances futures. Les coefficients de pondération représentent les intensités relatives de flux financiers[3]. Dans le cas de l'égalité des flux, cette moyenne coïncide avec la moyenne arithmétique. On obtient donc immédiatement :

$$q_1 = 6$$

On résoud alors :

$$1 = \frac{11}{10}.(1+i)^{-6}$$

On équilibre ainsi le montant emprunté et un versement "somme" situé en l'échéance moyenne initiale. On en tire $i = 0.0160119$, correspondant à la valeur $x = 0.98424$. On obtient ensuite le tableau de valeurs:

q_j	x_j
6	0.984241
5.92059	0.984031
5.91952	0.984028
5.91951	0.984028

On en déduit le taux mensuel réel $i = \frac{1}{1+x} = 0.0162314$ et on calcule le $TAEG = 0.213141$.

[3] Voir les relations(1).

3.7.2 Épargne-pension

Considérons[4] le cas d'une épargne complémentaire à la retraite légale souscrite par une personne privée. Cette dernière épargne chaque année un montant a suivant un contrat garantissant des intérêts au taux annuel i. La formule des valeurs acquises nous donne après correction de capitalisation[5], la valeur cumulée et capitalisée des n premiers versements un an après le dernier de ceux-ci :

$$V = \frac{a}{i}\left[(1+i)^n - 1\right](1+i)$$

Sous certaines conditions (limitation du montant a), l'épargne est fiscalement déductible. Admettons, à chaque fois, une économie fiscale égale à $t_i.a$, avec $t_i \in]0,1[$ représentant le taux moyen de déductibilité. Lors de la mise à la retraite, les épargnes capitalisées en un montant V sont taxées au taux (final) t_f, avec en pratique $t_f < t_i$. En négligeant le retard re entre le versement de l'épargne et la réalisation de l'économie fiscale, le taux actuariel τ de l'épargne-pension vérifie l'équation :

$$\begin{aligned}
(1-t_i)a\sum_{k=1}^{n}(1+\tau)^k &= (1-t_f)V \qquad (3)\\
(1-t_i)a\left[(1+\tau)^n - 1\right].(1+\tau) &= \\
(1-t_f) &\quad . \quad \frac{a}{i}\left[(1+i)^n - 1\right](1+i) \qquad (4)
\end{aligned}$$

On vérifie que la solution à cette équation est indépendante du montant a.

Formellement, On pose

$$x = 1+\tau$$

$$b_k = \frac{1}{n}$$

et

$$C = \frac{(1-t)V}{n(1-\alpha)a}$$

[4] Voir chapitre 1.

[5] Comme vu au chapitre 1, le moment de la signature du contrat correspond au moment du premier versement et le moment de la perception du capital est postérieur au moment du dernier versement.

de façon à tomber sur l'équation :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x^k = C$$

dans laquelle, sous nos hypothèses, C est une constante strictement supérieure à 1.

Nous allons traiter successivement le cas simplifié ($re = 0$) et le cas réel afin d'appréhender l'ordre de grandeur numérique de l'erreur commise. Les calculs sont présentés en détails afin d'illustrer la méthode. Considérons un individu de 35 ans épargnant jusqu'à 64 ans et partant à la retraite à l'âge de 65 ans[6]. Par unité épargnée et pour un taux $i = 0.0475$, on obtient le capital retraite "brut" :

$$\frac{1}{0.0475}.\left[(10.475)^{30} - 1\right].1.0475 = 66.6796$$

Pour un taux final $t_f = 0.18$, on obtient "net" par franc épargné annuellement :

$$(66.6796).(0.82) = 54.6773$$

L'échéance de ce capital ($n = 30$) correspond évidemment à son échéance moyenne ($p_1 = 30$). Les épargnes quant à elles s'échelonnent de $t = 0$ à $t = 29$ et leur échéance moyenne se situe bien entendu (versements "unité", donc identiques) en $q_1 = 14.5$. En travaillant avec un taux moyen spécial égal à 0.4 (qui conduit à un investissement réel égal à 60% de l'investissement producteur de revenus), on arrive à l'équation d'équilibre :

$$(30).(0.6).(1+\tau_1)^{-14.5} = 54.6773.(1+\tau_1)^{-30}$$

On en tire :

$$\tau_1 = 0.074314$$

L'échéance moyenne p_k est évidemment indépendante du taux quel que soit k. Par contre, on calcule q_2 de manière à équilibrer :

$$30.0.6.(1+\tau_1)^{-q_2} = 0.6.\frac{1}{\tau_1}.\left[1-(1+\tau_1)^{-30}\right].(1+\tau_1)$$

[6]On peut introduire ici des durées décimales entre la dernière épargne et le moment de la retraite sans modification de la méthode.

On en tire successivement :

$$\begin{aligned} q_2 &= 11.9149 \\ \tau_2 &= 0.06335 \\ q_3 &= 12.26 \\ \tau_3 &= 0.6463 \end{aligned}$$

Intéressons-nous à présent au cas où les économies fiscales sont réalisées avec un retard $re = \frac{10}{12}$ de 10 mois. Nous sortons ici du cadre d'application strict des résultats théoriques précédents, les flux positifs et négatifs étant alternés. Nous vérifierons que dans ce cas, l'existence et l'unicité des flux n'est plus garantie. Néanmoins, dans le cas qui nous occupe, la méthode reste encore d'application. L'équation à résoudre est :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau}.\left[1-(1+\tau)^{-30}\right].(1+\tau) &= \frac{0.4}{\tau}.\left[1-(1+\tau)^{-30}\right].(1+\tau)^{\frac{2}{12}} \\ &+ 54.6773.(1+\tau)^{-30} \end{aligned}$$

On équilibre ainsi les flux négatifs (épargnes unités) et les économies fiscales (décalées de 10 mois ce qui explique l'exposant) auxquelles s'ajoute le capital retraite dont l'échéance est inchangée. Il convient ici de calculer systématiquement deux échéances moyennes. On obtient pour les flux positifs :

$$p_1 = \frac{(0.4).\sum_{k=0}^{30}(k+\frac{10}{12})}{30.(0.4)+54.6773} = 27.36042$$

Quant aux flux négatifs, demeurant constants, leur échéance coïncide toujours avec la moyenne arithmétique :

$$q_1 = 14.5$$

On résoud alors :

$$30.(1+\tau_1)^{-14.5} = (30.(0.4)+54.6773).(1+\tau_1)^{-27.36042}$$

On en tire :

$$\tau_1 = 0.06407$$

Les nouvelles échéances moyennes sont obtenues par équilibre des flux échelonnés et d'un flux unique. On résout successivement :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\tau_1}.(1+\tau_1).\left[1-(1+\tau_1)^{-30}\right] &= 30.(1+\tau_1)^{-q_2} \\
\frac{0.4}{\tau_1}.(1+\tau_1)^{\frac{1}{6}}.\left[1-(1+\tau_1)^{-30}\right] &+ 54.6773.(1+\tau_1)^{-30} \\
= (30.(0.4) &+ 54.6773).(1+\tau_1)^{-p_2}
\end{aligned}$$

Dont on tire :

$$\begin{aligned}
q_2 &= 12.23766 \\
p_2 &= 25.347427 \\
\tau_2 &= 0.06282
\end{aligned}$$

La fourchette de taux après deux itérations seulement est donc de $0.0628 \leq \tau \leq 0.0641$. Pour mémoire, le problème simplifié avait donné $0.0633 \leq \tau \leq 0.0646$, légèrement décalée vers la droite, ce qui était attendu. L'ordre de grandeur de l'erreur est de 0.0005, ce qui est parfaitement acceptable.

4 Non-unicité du taux d'équilibre

Les résolutions d'équations que nous venons de proposer n'ont évidemment de sens que lorsque la solution numérique obtenue est économiquement interprétable, ce qui sous-entend ici que la solution sur l'ensemble des réels positifs doit être unique. Nous allons vérifier sur plusieurs exemples simples et néanmoins économiquement réalistes, que ce n'est pas toujours le cas.

4.1 Exemples numériques

Considérons un premier investissement en l'origine de 4 unités monétaires. L'activité qui en découle permet dès la première année de dégager un résultat substantiel de 9.5 unités monétaires. En espérant relancer la production, il faut après deux ans réinvestir 6 unités. Le résultat n'est plus à la mesure de notre attente, on liquide l'affaire après quatre ans en laissant un solde positif d'une demi unité monétai-re. La solution $i = 0$ de l'équation d'équilibre est évidente mais pour résoudre complètement le problème, il convient d'étudier la valeur actuelle nette du projet. On calcule ici la valeur actuelle des flux positifs moins la valeur actuelle des investissements :

$$VAN(i) = -4 - 6(1+i)^{-2} + 9.5(1+i)^{-1} + 0.5(1+i)^{-4}$$

La VAN (valeur actuelle nette) est une fonction positive et croissante sur l'intervalle]0 ; 0.084[, positive et décroissante sur]0.084 ; 0.1791[et décroissante et négative pour des valeurs $i > 0.1791$. La limite pour i tendant vers l'infini donne -4 (valeur de l'investissement initial). Ce projet pour lequel, la somme des investissements est rigoureusement égale à la somme des flux positifs a une valeur actuelle nette strictement positive pour $i \in]0; 0.1791[$. Il est évidemment absurde de vouloir définir *le* taux de rendement interne dans ce type de problème.

On peut trouver pire. Que penser d'un investissement de 5 unités se traduisant par un premier flux de 15 unités avant que l'affaire ne périclite. La banqueroute traîne et ce n'est que 8 ans plus tard que l'on est contraint de liquider le solde (négatif) de 11 unités. Dans le cadre de cet exemple, la somme des flux négatifs est strictement supérieure à celle des flux positifs. Faut-il pour autant se dispenser d'investir? En étudiant la fonction VAN(i) comme plus haut,

$$VAN(i) = -5 - 11(1+i)^{-8} + 15(1+i)^{-1}$$

on arrive à une fonction strictement positive $\forall i \in]0.015; 1.999[$, c'est-à-dire pour toute valeur raisonnable du taux. De tels cas ne sont pas à exclure d'emblée et posent le problème des fondements de la théorie. Certes, ces cas pathologiques sont peu nombreux, et dans la majorité des problèmes réels, la théorie du taux de rendement interne et celle de la valeur actuelle nette ont un sens. Mais il convient cependant de conserver en mémoire le fait que les principes utilisés n'ont qu'un domaine de validité limité. Dans notre exemple pathologique, la fonction $VAN(i)$ a l'allure suivante :

4.2 Construction algébrique de contre-exemples

La méthode recommandée par le législateur pour le calcul de TAEG et introduite par Jaumain[7] peut convenir à de nombreuses autres applications. Elle vise à résoudre d'une manière générale des équations du

[7] Voir [17].

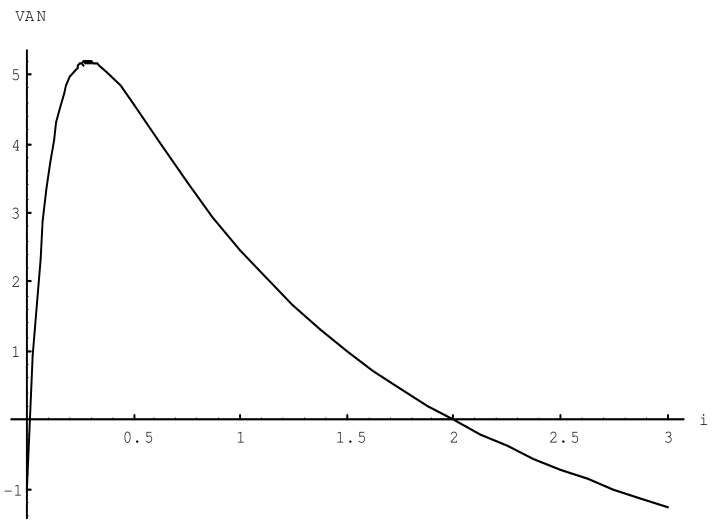

Figure 1: Valeur actuelle nette comme fonction du taux

type:

$$\sum_{a=1}^{n} C_a * (1+i)^{-t_{av}} = \sum_{b=1}^{m} R_b * (1+i)^{-t_{bf}}$$

dans laquelle les C_a représentent les investissements (flux négatifs) d'échéances t_{av} et les R_b, les flux positifs (revenus nets) consécutifs aux investissements. Sa résolution peut être vue comme la recherche du point d'intersection de deux fonctions représentant chacune la valeur actuelle des flux positifs et négatifs. Ces deux fonctions sont décroissantes et de concavité vers le haut (fonctions convexes). Lorsque les flux négatifs sont antérieurs et globalement inférieurs aux flux positifs en découlant, on vérifie que les deux fonctions ont un point d'intersection unique. Lorsque ces conditions ne sont plus remplies, on peut construire des contre-exemples à l'unicité des taux de rendement et ce dans un contexte économiquement admissible.

On vérifie qu'il faut au moins deux investissements pour arriver à construire des cas pour lesquels la notion de taux de rendement interne n'a pas de sens. On constate qu'il faut également envisager au minimum deux flux positifs pour donner au problème un contexte économiquement raisonnable. En ne considérant qu'un seul flux positif, les conditions à imposer sont trop fortes que pour être intégrées dans un contexte réaliste.

Soit l'équation d'équilibre :

$$C_0 + C_1(1+i)^{-t_1} = R_1(1+i)^{-s_1} + R_2(1+i)^{-s_2}$$

On suppose que

$$C_0, C_1, R_1, R_2, t_1, s_1, s_2 > 0$$

$$s_1 \neq t_1 \qquad s_1 \neq s_2 \qquad s_2 \neq t_1$$

qui sont des conditions économiquement raisonnables: la première échéance correspond au premier investissement, les autres sont postérieures. De plus, les flux positifs et négatifs sont clairement définis. Sous quelles conditions *économiquement réalistes* peut-on résoudre le système ?

$$C_0 + C_1(1+i_1)^{-t_1} = R_1(1+i_1)^{-s_1} + R_2(1+i_1)^{-s_2}$$

$$C_0 + C_1(1+i_2)^{-t_1} = R_1(1+i_2)^{-s_1} + R_2(1+i_2)^{-s_2}$$

$C_0, C_1, i_1, i_2, t_1, s_1, s_2$ sont fixés et supposés strictement positifs. On calcule R_1 et R_2. Le déterminant :

$$D = \begin{vmatrix} (1+i_1)^{-s_1} & (1+i_1)^{-s_2} \\ (1+i_2)^{-s_1} & (1+i_2)^{-s_2} \end{vmatrix} \neq 0$$

sous nos hypothèses. Si on suppose $s_2 > s_1$ et $i_1 > i_2$, ce qui n'est nullement restrictif, on vérifie que $D > 0$.

Calculons les déterminants

$$D_1 = \begin{vmatrix} C_0 + C_1(1+i_1)^{-t_1} & (1+i_1)^{-s_2} \\ C_0 + C_1(1+i_2)^{-t_1} & (1+i_2)^{-s_2} \end{vmatrix}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} (1+i_1)^{-s_1} & C_0 + C_1(1+i_1)^{-t_1} \\ (1+i_2)^{-s_1} & C_0 + C_1(1+i_2)^{-t_1} \end{vmatrix}$$

Sous nos conditions (flux positifs), D_1 doit être strictement positif. On vérifie que c'est le cas dès que $s_2 > t_1$. De même, la positivité de D_2 est assurée dès que $s_1 < t_1$ et que les investissements vérifient :

$$C_1[(1+i_2)^{s_1-t_1} - (1+i_1)^{s_1-t_1}] > C_0[(1+i_1)^{s_1} - (1+i_2)^{s_1}]$$

On peut ainsi construire une infinité d'exemples mettant la théorie générale en défaut. On remarque que dans tous ces exemples, les flux positifs et négatifs sont alternés. On peut également observer que la somme des flux positifs est inférieure à celle des investissements. Nous n'avons pas fait d'hypothèses concernant les échéances qui peuvent éventuellement être non naturelles.

Bibliographie

[1] BAIR J. - HINNION R. - JUSTENS D. (1989) : *Applications économiques au service de la mathématique*, Société Belge des Professeurs de Mathématique.

[2] BAIR, J. (1993) : *Mathématiques générales à l'usage des sciences économiques, de gestion et A.E.S.*, Bruxelles, De Boeck-Université, 3e édition.

[3] BAIR, J. - HAESBROECK, G - JUSTENS, D - ROSOUX, J. (1998) : *Modèles mathématiques en finance: de l'incohérence à l'incertitude ou au chaos*, Presses Ferrer Publication de la haute École Francisco Ferrer, Bruxelles.

[4] BAIR, J. - JUSTENS, D. (1994) : Une étude mathématique des taux de crédit à la consommation proposés par le législateur belge, *CREDEL*, Université de Liège.

[5] BAIR, J. - JUSTENS, D. (1996) : Propriétés de moyennes pondérées de puissances et applications financières, *Publication GEMME* 9623, Ulg.

[6] BOULEAU, N. (1998) : *Martingales et marchés financiers*, Odile Jacob, Paris.

[7] BRIOT, J.M. - ESCH, L - KINON, V. - JUSTENS, D. - SIMON, L. - STIEVENART, T. (2000) : Modélisation et gestion du risque en finance, Édition Presses Ferrer, Institut Cooremans, Place Anneessens, 11, 1000 Bruxelles.

[8] CARETTE, A. (1997) : *Calcul du taux actuariel des emprunts hypothècaires*, Mémoire de fin d'étude en sciences commerciales, HEFF/Cooremans, Bruxelles.

[9] CARETTE, A. - JUSTENS, D. - BRIOT, JM (1999) : *L'emprunt Hypothécaire de la législation fiscale aux calculs actuariels*, Préface de Elio di Rupo. Ouvrage + CD-ROM. Édition Presses Ferrer, Institut Cooremans, Place Anneessens, 11, 1000 Bruxelles.

[10] CNAPELINCKX, G.- NYSTEN, L. - MEURICE, P. (1986) : *Algèbre financière*, De boeck, Bruxelles, 21^e édition.

[11] DEMANGE, G. - ROCHET, J.C. (1992) : *Méthodes mathématiques de la finance*, Paris, Economica.

[12] DEVOLDER, P. (1984) : Modèle déterministe de variation des taux d'intérêt, Rapport Technique PS, Bruxelles, CADEPS-ULB.

[13] DEVOLDER, P. (1986) : Opérations stochastiques de Capitalisation, *Astin Bulletin*, **16**.

[14] DEVOLDER, P. (1993) : *Finance stochastique*, Bruxelles, Editions de l'Université de Bruxelles, Collection actuariat.

[15] ESCH, L. - JUSTENS D. - MOEREMANS, G. - GEUSKENS, N. (2001) : *Modélisation de produits financiers à risque réduit : obligations, sicav, options, swaps et swaptions.* Édition Presses Ferrer, Institut Cooremans, Place Anneessens, 11, 1000 Bruxelles.

[16] HUSSET, Y. (1992) : Calcul du taux effectif global d'un prêt à amortissements échelonnés, *Bulletin de l'AMEP*, 386, pp. 519-534.

[17] JAUMAIN, C. (1979) : Calcul du taux d'intérêt réel d'une opération financière, *Mitteilungen der Vereiniging schweiz. versicherungsmathematiker*, Helft 2, pp. 137-146.

[18] JUSTENS, D. - ROSOUX, J. (1995) : *Introduction à la mathématique financière*, 3e édition, Bruxelles, De Boeck-Université.

[19] JUSTENS, D. - SCHYNS, M. (1997) : *Théorie stochastique de la décision d'investissement*, Bruxelles, De Boeck-Université.

[20] ROGER, P. (1991) : *Les outils de la modélisation financière*, PUF.

[21] ROGER, P. (1996) : *L'évaluation des actifs financiers*, De Boeck-Université, Bruxelles.

[22] SAADA, M. (1985) : *Mathématiques financières*, Collection Que sais-je? 2192, PUF.

Table des matières