Équations récurrentes en finance

Daniel Justens

Face à un problème concret, le mathématicien a plusieurs options. Il peut en donner une représentation très simplifiée et, dans ce cas, le problème se réduira souvent à la résolution d'une ou plusieurs équations élémentaires livrant la solution sous forme d'une *formule*. Cette représentation du réel sera généralement jugée insuffisante et le matheux devra fournir une description plus réaliste. Lorsque le modèle plus complexe est traduit en équations, il est fréquent que ces dernières ne livrent leur solution qu'au moyen d'un *algorithme* : succession de démarches et de calculs intermédiaires aboutissant à la longue à la solution. Si la représentation du réel est toujours jugée trop caricaturale, le malheureux mathématicien devra ajuster une fois encore son modèle aux demandes de son employeur et renoncer à l'obtention de solutions exactes pour se contenter d'*heuristiques*.

Nous allons illustrer ces propos au moyen d'un problème financier : le calcul de la rentabilité d'un investissement. C*onsidérons un employeur (sans aucun sens social) investissant dans un matériel (coût V=100 000 €) lui permettant d'éviter pendant 5 ans (durée de vie du matériel) l'engagement d'un ouvrier supplémentaire (coût a=25 000 € par an). Cette opération est-elle économiquement rentable ?*

Mise en équation linéaire

L'étalement des économies réalisées nous contraint à recourir à des formules de mathématique financière donnant la valeur d'un capital à un autre instant que sa date d'échéance en fonction d'un paramètre économique : le taux d'intérêt noté i. La façon la plus élémentaire de travailler est *l'intérêt simple*, une description linéaire. Soit un capital C échéant à un instant que nous baptisons *origine des temps* (t=0). La valeur de ce capital en un instant t quelconque est donnée par

$$C(t) = C\,(1 + i\,t),$$

En équilibrant notre investissement et la somme des économies *actualisées* (calculées au moment de l'investissement), on arrive à l'égalité :

$$V = a(1-i) + a(1-2i) + a(1-3i) + a(1-4i) + a(1-5i),$$

dans laquelle les valeurs négatives du temps traduisent des moments de calcul antérieurs à l'échéance du capital, ce qui est le cas des 5 « économies » successives réalisées. La résolution générale (horizon n) de l'équation fait intervenir les sommes de termes en suite arithmétique et livre une première idée du rendement de l'investissement :

$$i = [a - V/n]/[a\,(n+1)/2]$$

Dans notre problème (V = 100000, a = 25000 et n = 5), on obtient

$$i = 1/15 = 0{,}06667.$$

On constate que la formule conduit parfois à des absurdités : avec ce taux (1/15), des économies réellement réalisées dans 16 ans ou plus, auront une valeur actuelle négative !

Mise en équation exponentielle

Un modèle plus élaboré de l'évolution d'un capital en fonction du temps est l'*intérêt composé.* Avec les mêmes notations que plus haut :

$$C(t) = C\,(1+i)^t$$

Cette façon de faire est la seule description en univers stable, différentiable, pour laquelle les accroissements de capital sont proportionnels au capital, ce qui est économiquement incontournable. L'équation d'équilibre devient :

$$V = a(1+i)^{-1} + a(1+i)^{-2} + a(1+i)^{-3} + a(1+i)^{-4} + a(1+i)^{-5}$$

qui peut s'écrire formellement (selon un horizon n) :

$$a\,(x+x^2+ \dots +x^n) - V = 0.$$

Nous savons que les équations polynomiales de degré supérieur ou égal à 5 n'admettent pas de solution générale exprimable au moyen d'une formule. Notre équation particulière admet 5 (n) solutions réelles ou complexes conjuguées dont une seule nous intéresse : celle qui a un sens économique.

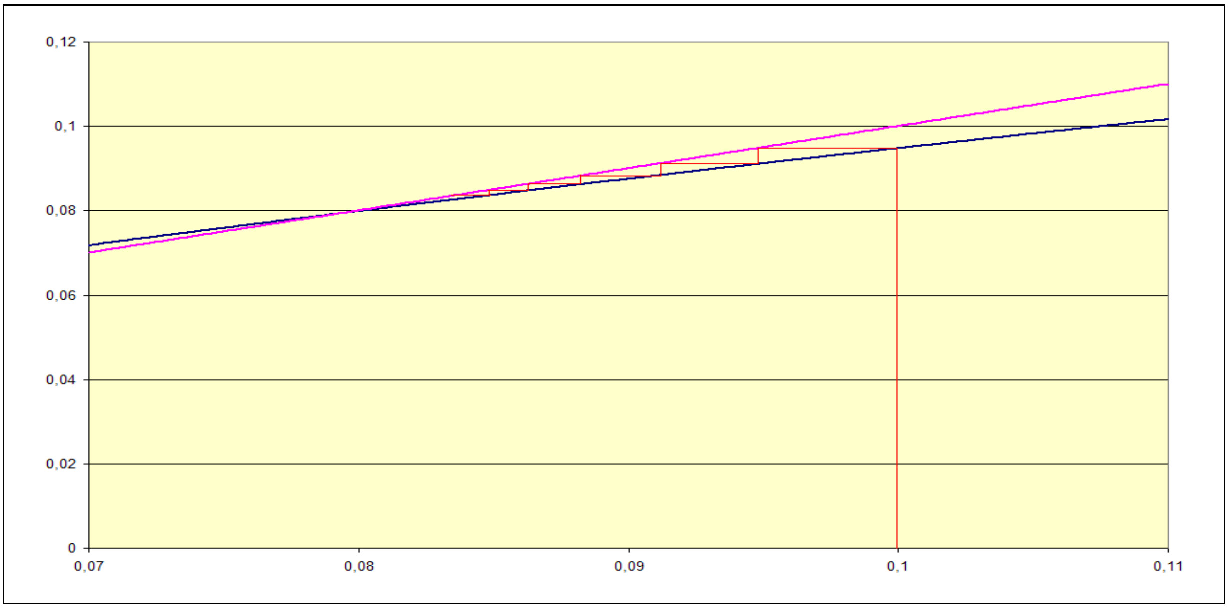
L'équation comprend la somme de 5 (n) termes en suite géométrique de raison $(1+i)^{-1}$. En calculant cette somme, on arrive après quelques manipulations algébriques élémentaires à :

$$f(i) = V - a/i\,[1 - (1+i)^{-n}\,] = 0$$

On peut transformer cette équation en une autre, équivalente, prenant une forme dite *récurrente* $i = \varphi(i)$, en isolant le i du dénominateur dans le membre de droite :

$$i = a/V\;\;[1 - (1+i)^{-n}\,] = \varphi(i)$$

En partant d'une valeur arbitraire i_0, on construit une suite de valeurs i_k par application répétée de $i_{k+1} = \varphi(i_k)$. Lorsque la dérivée en valeur absolue de $\varphi(i)$ est bornée par un réel strictement inférieur à 1, la suite ainsi construite converge. En choisissant $i_0>0$ raisonnablement proche de zéro (c'est un taux d'intérêt), on obtient une suite de valeurs qui va tendre vers la solution économiquement raisonnable de l'équation. Avec nos données (V = 100000, a = 25000, n = 5 et i_0 = 0.1), on arrive après 65 itérations à la valeur i = 0.07930826 qui équilibre l'équation de départ au cent près. On peut vérifier que $\varphi'(i)$ est « bien bornée » et visualiser la convergence vers la solution de manière géométrique. Sur le graphique qui suit, la fonction $\varphi(i)$ est représentée en bleu, la fonction identité i en rose et la construction des valeurs successives par l'*escalier rouge* qui *descend* vers la solution $i = \varphi(i)$:



La méthode est simple mais peu efficace. Elle cesse d'être applicable dès que l'on introduit une variation dans les économies futures. Or c'est souvent le cas : l'ouvrier non engagé aurait eu un salaire en croissance régulière. L'équation d'équilibre devient alors dans ce cas :

$$V = a_1(1+i)^{-1} + a_2(1+i)^{-2} + a_3(1+i)^{-3} + a_4(1+i)^{-4} + a_5(1+i)^{-5} = F_1(i)$$

On peut tabler par exemple (en milliers d'€) sur $a_1 = 25$, $a_2 = 26$, $a_3 = 27$, $a_4 = 28$, $a_5 = 29$. Une méthode élégante proposée par Christian Jaumain et généralisable aux dates non entières, est celle de *l'échéance moyenne*. Jaumain propose de remplacer la fonction

$$F_1(i) = a_1(1+i)^{-1} + a_2(1+i)^{-2} + \ldots + a_n(1+i)^{-n}$$

par une fonction plus simple du type

$$F_2(i) = K(1+i)^{-q}$$

dans laquelle q symbolise une sorte d'échéance moyenne, en veillant à ce que les deux fonctions soient presque identiques au voisinage de la solution économiquement réaliste (proche de 0). En fait, l'algorithme de Jaumain consiste à remplacer une moyenne pondérée d'exponentielles par une exponentielle moyenne.

On calcule K pour avoir $F_1(0) = F_2(0)$, ce qui livre

$$K = a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Afin d'assurer un comportement presque identique des deux fonctions dans un voisinage immédiat, on veille à vérifier également $F'_1(0) = F'_2(0)$, ce qui offre une première échéance moyenne :

$$q = \frac{a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \ldots + n a_n}{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}$$

Au lieu de résoudre $V = F_1(i)$, on traite $V = F_2(i)$, qui se réduit à la *formule* :

$$i_1 = \left(\frac{K}{V}\right)^{(1/q_1)} - 1$$

La solution obtenue ne vérifie pas exactement $F_1(i_1) = F_2(i_1)$. On convient alors de modifier l'échéance moyenne dans F_2 pour obtenir cette égalité, ce qui donne

$$q_2 = \frac{\ln\left(\frac{K}{F_1(i_1)}\right)}{\ln(1+i_1)}$$

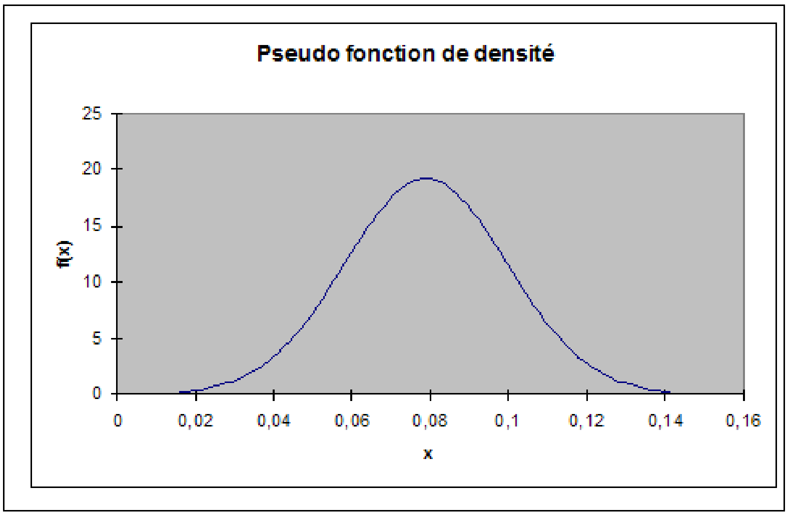
La mécanique étant lancée, on calcule successivement i_2 en remplaçant q_1 par q_2 dans la formule précédente, puis q_3, i_3, etc... Avec les économies constantes de 25 000 €, on arrive à la solution après 5 itérations seulement. Les flux variables conduisent à i =0,10620218 sans accroître la longueur du processus. Cerise sur le gâteau, la démonstration de la convergence fait apparaître des propriétés intéressantes des moyennes pondérées de puissances.

Le passage en univers aléatoire

Une des critiques principales aux modèles qui viennent d'être présentés est leur contexte déterministe. En univers réel, rien ne garantit à l'investisseur le montant des économies futures : l'ouvrier engagé peut être mis en chômage économique, on peut occasionnellement devoir engager deux ouvriers et la liste est longue des aléa altérant la valeur des coûts évités. Dans un modèle réaliste, les a_k prennent donc la forme de variables aléatoires pour lesquelles, au mieux, on connaît la distribution de probabilité. Dans l'équation

$$V = a_1(1+i)^{-1} + a_2(1+i)^{-2} + a_3(1+i)^{-3} + a_4(1+i)^{-4} + a_5(1+i)^{-5}$$

lorsque les a_k sont des variables aléatoires, chaque ensemble de réalisations de ces variables (que l'on appelle un *futur possible*) détermine une valeur du rendement i qui devient alors une variable aléatoire implicite dont on désire connaître la distribution de probabilité. Pour contourner la complexité du problème, on a recours à la méthode dite de Monte-Carlo. Celle-ci consiste à simuler un grand nombre de futurs possibles et à travailler sur la statistique des rendements calculés. Dans le cas de notre exemple, avec l'hypothèse de 5 variables aléatoires a_k, normales, de moyennes 25000 € et d'écarts-types 3000 €, on va obtenir après 1000 simulations de futurs possibles, une distribution des rendements observés ressemblant au graphique ci-contre.



Une conclusion toute en nuances

Quel est le rendement de cet investissement ? Nous pouvons écarter la première solution fondée sur une description linéaire absurde. Si la description exponentielle est justifiable économiquement, elle n'intègre pas les modifications ultérieures non prévisibles et le rendement en apparence suffisant de 7,9 % (ou de plus de 10 % en tablant sur des salaires croissants) se traduit en fait par l'appartenance probable à une fourchette nettement moins confortable oscillant entre 2 et 14 %. Faut-il alors vraiment renoncer à engager un ouvrier supplémentaire ?