Des axiomes et hypothèses aux démonstrations et conjectures
De l'impossibilité de rien démontrer sans axiomes

Daniel Justens

Chapeau : Qu'est-ce qui fait la différence entre les mathématiques et d'autres sciences comme la physique, la biologie ou la chimie ? Répondre à cette question demande d'approfondir et de comprendre la structure même des mathématiques. En quoi les raisonnements mathématiques diffèrent-ils des raisonnements sous-tendant les autres disciplines scientifiques ? Le mathématicien hongrois György Pólya propose une explication.

Le cadre axiomatique

Les plus anciens objets mathématiques découverts à ce jour, les fameux bâtons d'Ishango (20 000 ans B.C.), n'ont pas encore révélé leurs secrets. On connaît un peu mieux la mathématique babylonienne qui nous a livré des milliers de tablettes à contenu scientifique. La mathématique égyptienne nous est parvenue partiellement au travers de deux papyrus intéressants, le Rhind et le papyrus de Moscou. Tablettes mésopotamiennes et papyrus égyptiens révèlent certes l'exposé de propriétés intéressantes et parfois complexes de divers objets mathématiques mais ont un point commun : ces propriétés sont énoncées comme autant de vérités sans que soient ébauchés le moindre raisonnement étayant la validité des propositions avancées. Ce qui manque à ce stade, et qui fait le fondement même des mathématiques, c'est la notion de preuve. Pour découvrir les premiers raisonnements visant à établir définitivement certaines propriétés, il faut attendre les premiers mathématiciens grecs.

Mais en quoi consiste une démonstration ? Les mathématiques actuelles sont construites sur base d'axiomatiques. Ce point de vue est assez récent et le caractère arbitraire des axiomes, qui restreint de fait le champ de validité des résultats obtenus, n'a été accepté que récemment dans l'histoire des mathématiques : chacun connaît la fameuse querelle des géométries non euclidiennes qui eurent quelque mal à s'imposer comme alternative également plausible à la géométrie d'Euclide. Étymologiquement, le terme axiome vient du grec ancien αξιωμα signifiant « digne d'être pris en considération et donc, évident en soi ». Il désignait une *vérité* indémontrable qui devait être admise. Pour les philosophes et les mathématiciens grecs de l'Antiquité, l'axiome est une affirmation *évidente,* qui n'a pas besoin d'être prouvée. Jusqu'au début du 19^{e} siècle, ce terme d'axiome a continué à désigner une proposition *évidente* en elle-même dans la plus pure tradition des *Éléments* d'Euclide. Les questions qu'ont posées certains chercheurs creusant les fondements des mathématiques aux 19^{e} et 20^{e} siècles ont bouleversé cette conception.

Aujourd'hui, un axiome désigne une vérité première acceptée sans justification mais exclusivement *à l'intérieur d'une théorie mathématique*. L'ensemble des axiomes d'une théorie constitue ce que l'on appelle une *axiomatique*. On espère cette dernière non contradictoire. Mais c'est sa seule contrainte. Et surtout, aucun mathématicien n'attribue plus aujourd'hui aux axiomes qu'il choisit une quelconque valeur de vérité. Ils demeurent à son libre choix sous l'unique contrainte de la cohérence interne. Il n'est plus question en mathématique de comprendre le monde. Cette tâche échoit à toutes les autres disciplines scientifiques. En mathématiques, il est uniquement question de demeurer cohérent.

Une axiomatique définit entièrement une théorie mathématique. Chaque axiome de cette théorie doit être considéré comme un point de départ dans un système de raisonnements logiques et seulement de ce point de vue. Toutes les théories axiomatiques ne sont pas également riches. Les plus pertinentes sont celles qui, partant d'un nombre limité d'axiomes simples à énoncer et clairs, permettent le développement d'une théorie étendue contenant un grand nombre de propriétés démontrées ou non. Ces propriétés sont « enfermées » dans les axiomes et attribuées aux objets dont ils permettent la construction. Sans axiomes, il est impossible de « démontrer » quoi que ce soit. Le mathématicien Pólya (voir encadré) nomme *raisonnement démonstratif*, tout type de raisonnement assurant de manière définitive la validité de connaissances mathématiques dans une axiomatique donnée et suivant les principes d'une logique booléenne (une proposition est soit vraie, soit fausse).

Ce type de considération n'exclut nullement le recours à des éléments moins objectifs contenus dans ce que l'on nomme, sans bien le définir, « l'intuition ». Car les mathématiques sont toujours en construction. Il y a des mathématiques achevées, présentées sous une forme définitive, qui sont purement démonstratives et ne comportent que des preuves. Mais il y a aussi les mathématiques en gestation qui ressemblent à toute autre connaissance humaine au même stade de développement. C'est dans ce cadre que se situent les conjectures, propriétés qui *semblent vraies* aux yeux de certains mathématiciens mais qui n'ont pas été démontrées. Le statut des conjectures peut évoluer de différentes manières. Certaines conjectures deviennent axiomes, comme le fit la conjecture grecque par excellence en géométrie, bien connue du grand public sous l'appellation « postulat d'Euclide », dont les vaines tentatives de démonstration ont émaillé les siècles. Ce qui est devenu *l'axiome de la parallèle unique* clôture la longue liste d'axiomes énoncés par Hilbert en 1899 dans ses « Grundlagen der Geometrie ». Hilbert se signalera d'ailleurs par la publication en 1900 d'une liste de 23 conjectures intéressantes qui connurent des sorts divers.

Les conjectures peuvent passer au rang de théorème lorsqu'une démonstration en est produite. L'exemple le plus célèbre est le *grand théorème de Fermat*. Elles peuvent aussi disparaître lors de la production d'un contre-exemple qui contredit leur énoncé. Ou encore faire partie de ces propositions vraies dans un cadre axiomatique donné qui ne pourront être démontrées. C'est le fameux théorème d'incomplétude de Gödel. Il en est ainsi pour la mal nommée « hypothèse du continu » qui figure en tête de liste parmi les 23 problèmes de Hilbert (il n'existe pas d'infini entre le dénombrable et le continu dont l'énoncé correct est : tout sous-ensemble infini des réels peut être mis en bijection avec l'ensemble des entiers naturels ou avec l'ensemble des réels lui-même). Cette conjecture est tout simplement « indécidable » à partir des axiomes généralement admis pour la construction de la théorie des ensembles. Enfin, et c'est le cas de nombre d'entre elles encore aujourd'hui, elles peuvent aussi continuer d'exister en tant que conjectures, en attente de statut définitif.

Le cadre plausible

Plaçons-nous à présent hors cadre mathématique : en physique, en biologie, en histoire, en économie ou en finance par exemple. Dans l'un de ces contexte, plus question de choisir ses axiomes. Les « vérités » qu'il faut accepter pour comprendre les phénomènes sont dictées par les observations mesurant les aspects que l'on entend privilégier de la réalité que l'on veut décrire. Et les théories que l'on désire mettre en place ont pour but d'expliquer notre monde, d'agir sur lui, de le gérer, de le comprendre. Ce cadre est infiniment plus ambitieux. Et, forcément, les théories proposées seront provisoires et sembleront contestables. Dans tous les domaines que nous avons évoqués, des hypothèses doivent être émises pour élaborer une théorie : existence et permanence de « lois » en physique, réalité de l'évolution en biologie, authenticité des textes en histoire, pertinence des observations et rémanence des comportements des acteurs économiques en gestion ou encore efficience des marchés en finance, par exemple.

Ces hypothèses prennent la place des axiomes des théories mathématiques dans ces différents domaines scientifiques. Mais le poids qu'on leur accorde est fondamentalement différent : dans le chef de leur utilisateur, ces hypothèses contiennent un élément de vérité à même de nous conduire à découvrir une part de la réalité du monde. Ces hypothèses constituent la partie indémontrable de la théorie. Ce cadre est celui du raisonnement hypothético-déductif que Pólya nomme *raisonnement plausible*, insistant par là sur le caractère éventuellement contestable de certaines des hypothèses admises.

Une façon de choisir rationnellement les hypothèses sous lesquelles on va travailler est le procédé d'abduction qui consiste à introduire une règle à titre d'hypothèse afin de considérer tout résultat observé dans un cadre donné comme un cas particulier tombant sous cette règle. Des hypothèses différentes sont ainsi testées successivement. Sont retenues celles qui permettent la construction d'un modèle hypothético-déductif reprenant au mieux l'ensemble des observations. Ce sont par exemple les lois physiques dont on suppose la permanence dans l'espace et le temps, ce qui demeurera toujours une hypothèse impossible à démontrer.

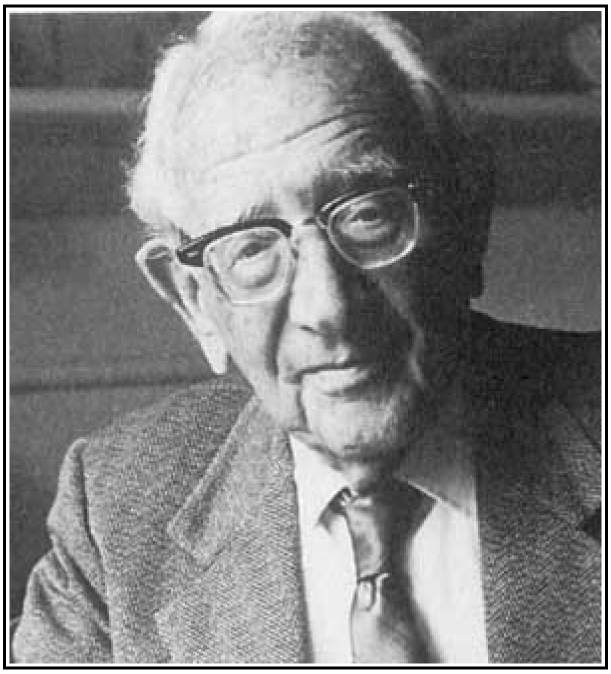
Raisonnement démonstratif contre raisonnement plausible

Le raisonnement démonstratif est sûr : il est incontestable et à l'abri de toute controverse. Ce dernier point ne s'établit pas de manière instantanée comme on a pu le constater notamment lors de l'introduction des géométries non euclidiennes, mais le temps jouant, tous les esprits éclairés se rendent aux évidences des démonstrations ne comportant aucune erreur logique. Il est également définitif. Mais ce dernier point n'est pas nécessairement positif : lorsqu'une axiomatique a livré tous ses secrets, elle perd une grande partie de son intérêt pour les mathématiciens. D'un certain point de vue, la logique propositionnelle par exemple, complète, est une théorie inerte, n'offrant plus aucune possibilité de recherche. Un problème totalement résolu mathématiquement est un problème mort. On peut faire la même constatation pour certains jeux et casse-têtes. Une fois la solution ou la stratégie optimale découverte, le casse-tête n'en est plus un, le jeu n'a plus aucun intérêt. Les raisonnements démonstratifs sont rigides et, exploité exclusivement par des mathématiciens, sont en substance incapables de conduire à des connaissances nouvelles sur notre monde.

Le raisonnement plausible est plus hasardeux et aussi contestable, les hypothèses admises, visant à comprendre le monde, pouvant être controversées, remplacées par d'autres plus efficaces. Ces raisonnements sont aussi provisoires : une théorie scientifique décrivant mieux ou plus simplement un fragment de réalité, en remplace une autre devenue obsolète. Mais ce type de raisonnement est souple, il peut être exploité par tout le monde et surtout, il apporte des connaissances nouvelles sur notre univers. Il nous permet de le comprendre lorsqu'on peut en proposer un modèle dont les conclusions ne s'éloignent pas trop des réalités observées, de le maîtriser, de le gérer de façon à accroître le bien être d'un nombre de plus en plus grand d'humains.

En guise de conclusion

En bref, dans le raisonnement démonstratif, l'essentiel est de distinguer une preuve d'une présomption (une conjecture), une démonstration valable d'une tentative qui a échoué. Dans le raisonnement plausible l'essentiel est de distinguer une présomption d'une autre, de faire la différence entre une présomption plus raisonnable et une autre qui l'est moins. Cette façon de voir permet de faire clairement la distinction entre axiome, hypothèse et conjecture. L'axiome est énoncé dans un cadre extérieur au monde réel et sert de base à la construction de modèles abstraits. Les hypothèses que l'on formule dans le cadre des raisonnements plausibles sont énoncées afin de nous aider à comprendre et gérer notre univers. La conjecture est un énoncé dans le cadre mathématique dont le statut est provisoire. On constate malheureusement que l'usage courant ne suit pas ces définitions univoques : on parlait du grand théorème de Fermat avant qu'il ne soit démontré, on parle parfois de l'hypothèse de Goldbach (formulée en 1742 : tout nombre entier pair supérieur à 3 peut s'écrire comme la somme de deux nombres premiers) alors qu'il s'agit encore et toujours d'une conjecture. Quand changera-t-elle de statut ? Il est impossible de le prévoir.



Encadré : György Pólya (Budapest -1887 ; Palo Alto, États-Unis – 1985)

Les travaux de Pólya ne se situent pas exclusivement dans un cadre scientifique et technique. Une partie importante de ses réflexions furent d'ordre didactique et épistémologique. Du côté purement mathématique (et donc « mathématique pure »), on lui doit des résultats sur les séries, la théorie des nombres, la combinatoire et le calcul des probabilités. Pólya est également l'auteur d'ouvrages développant une pédagogie de la découverte des mathématiques par la résolution de problèmes. C'est ainsi qu'au début des années 1950, il fit paraître *How to solve it*[1] : une approche heuristique particulièrement originale des mathématiques, présentant en gros ce que l'on appelle aujourd'hui l'enseignement des *compétences*. Plus tard, il s'attachera également à faire la différence entre la notion de *raisonnement démonstratif* qui se pratique en mathématique et ce qu'il nomme le *raisonnement plausible* utilisé dans tous les autres domaines scientifiques[2].

1 Polya G. : *Comment poser et résoudre un problème*, 2e édition, 1965, nouvelle édition 2007, (ISBN 2-87647-049-7), traduction de *How to solve it*, 1957.

2 Polya G. : *Les Mathématiques et le raisonnement "plausible"*, 1958, nouvelle édition 2008, (ISBN 2-87647-294-5).