Partie 1

De Thalès à Black et Scholes : petite étude épistémologique sur les options en finance

1 Histoire d'une génèse

Nul ne peut nier que dans l'économie contemporaine, le monde de la finance occupe une place privilégiée. Des produits neufs sont apparus depuis deux décennies de manière massive et, parmi ceux-ci, une place particulière doit être faite aux contrats d'option. Mais que sont donc ces options de plus en plus variées, diverses, multiples qui interviennent dans presque chaque placement financier proposé aujourd'hui à l'homme de la rue, putatif gestionnaire du genre *bon père de famille*, qu'ont-elles en commun ?

Quel que soit son type, on peut dire qu'une option est un contrat à terme contingent. Il s'agit de la conclusion aujourd'hui d'une transaction qui pourra éventuellement intervenir, à une ou même éventuellement plusieurs échéances futures, mais dans des conditions fixées dès à présent, et qui prendra alors un certain nombre de modalités qui sont fonction d'événements imprévisibles susceptibles de se passer entre-temps.

Cette définition générale met bien en évidence le double souci qui permet d'expliquer et de comprendre l'importance primordiale de ce type de contrat. Il s'agit :

- d'une part, de se préserver contre les aléas
- d'autre part, de spéculer sur ces mêmes aléas.

Si l'on en croit la littérature, cette double préoccupation serait recherchée par l'homme "depuis la nuit des temps[1]" . Nuançons quelque peu

[1] Voir [11]

ce propos et limitons-nous (exigence de documents) à la période historique. Dans l'Egypte antique, les récoltes de blé pouvaient, paraît-il, être achetées avant même que celui-ci ne soit semé. Voici ce qu'en dit l'écrivain Mika Waltari dans son roman *Sinouhé l'Egyptien* :

> *... le blé est merveilleux en ceci qu'on peut l'acheter et le vendre avant même que la crue ait inondé le pays et que le grain soit semé ...*

Mais selon certains auteurs[2], la première mention écrite du concept d'option se situe dans le livre I de *La Politique* écrit par Aristote. Elle relate l'histoire de Thalès [3] dont la pauvreté était expliquée par son intérêt pour la philosophie. Se basant sur des observations personnelles relatives aux mouvements des étoiles, il parvint à prévoir un hiver que la prochaine récolte d'olives serait meilleure que d'habitude. Il proposa dès lors aux propriétaires de pressoirs de sa région une somme d'argent pour avoir le droit de pouvoir exploiter prioritairement leurs pressoirs lors de la future récolte. Cette dernière fut effectivement abondante, d'où, comme l'a écrit Aristote[4] :

> *... plusieurs presses furent soudain demandées toutes en même temps, il [Thalès] les donna au prix qui lui convenait et gagna ainsi une grosse somme d'argent. Il montra ainsi au monde que les philosophes pouvaient être riches s'ils le souhaitaient, mais que leur ambition était d'une autre nature.*

L'opération réalisée par Thalès peut ainsi être interprétée comme une des toutes premières options d'achat.

Une autre expérience bien plus récente nous est présentée par Pierre Chabardès et François Declaux[5] :

> *La Hollande du 17e siècle nous donne un exemple de marché d'options. A cette époque, ce pays produisait et exportait des bulbes de tulipes en grande quantité. Les prix*

[2] Voir[5] et [36]

[3] Thalès de Milet, environ 625 av. J.C. - environ 547 av. J.C. : mathématicien notamment connu pour un théorème de géométrie élémentaire qui porte son nom.

[4] Cité par [5], p. 205.

[5] Voir [9] pages 23 et 24.

en étaient très volatiles : aux hivers doux succédaient des récoltes abondantes et une baisse parfois forte des prix. Le phénomène inverse se produisait après les hivers rigoureux. Les revenus des producteurs de bulbes étaient donc très incertains. Leur besoin de garantir le prix de vente de leur production a vite suscité une offre de la part des négociants cherchant à s'enrichir.

Ces négociants auraient pu se contenter de proposer d'acheter la production à terme : la grande originalité de cette expérience hollandaise fut le développement d'un marché d'options. Les négociants proposèrent aux producteurs des options qui leur conféraient le droit de vendre leur production de bulbes à un prix fixé à l'avance. Cette expérience innovante fruit d'un contexte politique et économique très favorable, n'allait cependant pas durer.

A l'issue d'un hiver particulièrement doux, l'abondance de la récolte provoqua l'effondrement des prix. Les producteurs usèrent alors massivement du droit de vente qu'ils avaient acquis. Les négociants débordés ne purent faire face à leurs engagements et furent rapidement ruinés. Cet épisode mit fin au marché d'options sur bulbes de tulipes.

Une analyse récente a estimé que la cause majeure de la faillite de ce marché fut la sous-estimation de la valeur des options.

L'exemple hollandais n'est pas le seul. Un marché à terme sur le riz existait à la même époque à Osaka. Mais ces tentatives ne purent résister longtemps aux lois implicites et implacables du monde économique.

Ce qui manquait, c'était un modèle mathématique reposant sur des bases économiques crédibles, sur des raisonnements prenant en compte la réalité des opérations commerciales.

On le constate aussi, les premières options ne sont pas nées dans le milieu des marchés financiers. Ces derniers ne furent créés que tardivement : ce n'est qu'au début du 18^{e} siècle qu'ils commencèrent à se développer en raison de l'importance prise par le commerce international.

Et les premières tentatives se soldèrent par de cuisants échecs. Que l'on se souvienne de la tentative de Law et de sa faillite retentissante en 1720, une faillite qui hypothéqua toute chance de création d'un marché de valeurs fiduciaires pendant près d'un siècle en France. En Europe par exemple, il a fallu attendre 1978 pour voir fleurir le premier marché d'options de change aux Pays-Bas, l'*European Option Exchange*.

Les variations des cours monétaires et des valeurs boursières furent dès lors analysées, d'abord empiriquement. Notamment, les fluctuations des indices financiers parurent assez vite chaotiques, semblables à des variations de températures en météorologie par exemple. Par ailleurs, des spéculateurs en Bourse du 19^e siècle, tels Jules Regnault, observèrent intuitivement que "*l'écart pris sur un grand nombre d'opérations est en raison directe de la racine carrée du temps*[6]".

Le véritable début de l'histoire des marchés d'options remonterait selon Nicolas Bouleau[7], au milieu du 19^e siècle avec la création du Chicago Board Trade (1848), où les céréaliers déterminaient les prix de leur production en anticipant la livraison de leurs récoltes. Des contrats semblables y étaient également conclus pour stabiliser le prix du bétail.

Par contre, ce n'est qu'au tout début du 20^e siècle qu'eut lieu la toute première tentative sérieuse, par le français Louis Bachelier, pour mathématiser la finance moderne.

Mais avant de présenter l'œuvre de ce précurseur, il faut s'interroger sur la nature des fluctuations imprévisibles qui affectent les actifs financiers, sur les différentes modélisations de cette incertitude, et pour cela, il convient d'effectuer une première "digression" au coeur de diverses sciences apparemment éloignées de la finance.

[6] Voir [41].
[7] Voir [6].

2 Intermède scientifique, philosophique et historique

2.1 Origines du mouvement brownien

C'est au botaniste Robert Brown (1773 - 1858) que l'on doit l'appellation aujourd'hui classique de *mouvement brownien* pour décrire des trajectoires erratiques.

Historiquement, c'est dans le courant de l'été 1827[8], que ce dernier observa en suspension dans l'eau le pollen du *Clarkia pulchella* (une espèce de fleur sauvage nord-américaine) et qu'il constata sous son microscope, dans le fluide situé à l'intérieur des grains de pollen, de très petites particules agitées de mouvements apparemment chaotiques. Ceux-ci ne pouvaient s'expliquer par aucun phénomène physique connu et dans un premier temps, Brown les attribua donc à une activité vitale.

Mais en répétant l'expérience avec du pollen conservé dans l'alcool, et avec des particules inorganiques, il se rendit compte que les mêmes observations se renouvelaient invariablement, ce qui prouvait que les mouvements n'étaient pas liés à la vie. Il publia ses résultats en 1828 dans un opuscule intitulé *A brief account of microscopical observations on the particles contained in the pollen of plants ; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies*, reconnaissant par ailleurs dans ce petit texte, qu'il avait été précédé par d'autres savants dans la constatation de ces mouvements erratiques. Citons entre autres l'abbé John Turberville Needham (1713-1781), célèbre pour son extrême maîtrise du microscope, raison pour laquelle Buffon s'était associé à lui pour ses travaux sur la reproduction.

En réalité, la découverte du mouvement brownien occupe une place assez marginale dans l'œuvre de Brown. Principalement consacrés à l'étude des végétaux, les travaux du savant écossais couvrent un champ très vaste, allant de la classification des plantes à l'étude de leur anatomie, de leur embryologie, de leur cytologie, de leur répartition géographique. Ce qui fait que Brown aurait probable-

[8] Pour tout renseignement complémentaire, consulter [42].

ment été bien surpris si on lui avait prédit que ses contributions à la botanique seraient méconnues, tandis que son travail sur le mouvement des particules passerait à la postérité et que son nom y serait associé.

Voyons la suite. En 1877, Delsaux expliquait que les changements incessants de direction dans les trajectoires suivies par les particules devaient provenir de nombreux chocs entre celles-ci et la matière ; de plus, le mouvement en question semblait stimulé par la chaleur, irrégulier, aléatoire et non lisse. En l'honneur du naturaliste britannique, un tel déplacement fut qualifié de "brownien" : il s'agit d'un processus qui évolue au cours du temps de manière si désordonnée qu'il semble difficile d'en prévoir l'évolution même dans un intervalle de temps très court.

En 1905, Albert Einstein publia trois articles qui révolutionnèrent la physique. Dans l'un d'entre eux, *Sur le mouvement de particules en suspension dans un fluide au repos impliqué par la théorie cinétique moléculaire de la chaleur*, Einstein expliqua le phénomène du mouvement brownien par l'existence de molécules dans le liquide, qui heurtent en permanence la particule observée. Le mouvement résultant de ces chocs change de direction en permanence et apparaît totalement aléatoire. Le mouvement brownien apporte donc la preuve de l'existence des atomes.

Einstein émit l'hypothèse que le déplacement entre deux instants est indépendant de ses positions antérieures et que sa loi de probabilité ne dépend que de la durée séparant les deux moments en question. Il prouva que cette loi obéit à une équation aux dérivées partielles bien connue aujourd'hui sous l'appellation *équation de la chaleur*, dont la distribution gaussienne est une solution.

La même année, le physicien polonais M. Smoluchovski décrivit le mouvement brownien comme limite de promenades aléatoires : tout se passe comme si le point matériel considéré se déplaçait sur un axe orienté en effectuant une succession d'un nombre très grand de pas de longueur petite effectués aléatoirement et indépendamment tantôt dans le sens positif de l'axe, tantôt dans le sens négatif avec des probabilités identiques. Formellement, si la position du point est caractérisée sur cet axe par son abscisse z qui dépend de la variable temporelle t, les variations des positions Δz enregistrées sur un laps de temps Δt obéissent à cette égalité :

$$\Delta z = \eta \sqrt{\Delta t}$$

où η désigne une variable aléatoire suivant une distribution normale centrée réduite ; en passant à la limite pour Δt tendant vers 0, on obtient, moyennant la condition initiale $z(0) = 0$, un mouvement aléatoire tel que l'espérance mathématique de $z(T)$ est nulle, ce qui signifie que les fluctuations dans un sens ou dans l'autre se compensent en moyenne sur l'intervalle $[0, T]$, avec une variance proportionnelle au temps T.

Effectuons à présent une courte incursion dans les mathématiques de ces époques pour constater que l'obtention de résultats significatifs sur le mouvement brownien n'a été possible que grâce à des développements mathématiques, spécialement en analyse. En effet, les arguments utilisés dans ces questions utilisent de manière fondamentale le calcul différentiel, créé d'abord par Newton et Leibniz au XVII$^{\text{ème}}$ siècle en faisant appel au concept d'"infiniment petit", puis développé par leurs successeurs tout au long des XVIII$^{\text{ème}}$ et XIX$^{\text{ème}}$ siècles, jusqu'à aboutir à une présentation classique et rigoureuse en abandonnant progressivement toute intervention des infiniment petits [4].

Mentionnons, à titre d'exemple, la construction, par le mathématicien tchèque Bolzano, de fonctions continues, mais non dérivables en tout point ... ce qui est précisément le cas pour des trajectoires browniennes et fut d'ailleurs observé, en 1913, par le physicien J. Perrin dans son livre *Les Atomes* : "on ne peut non plus fixer une tangente, même de façon approchée, à aucun point de la trajectoire, et c'est un cas où il est vraiment naturel de penser à ces fonctions continues sans dérivées que les mathématiciens ont imaginées et que l'on regarde à tort comme de simples curiosités mathématiques, puisque la nature les suggère aussi bien que des fonctions à dérivées" (cité dans [6], p. 39).

Par ailleurs, le sujet étudié fait naturellement appel à la statistique et au calcul des probabilités, qui, jusqu'au siècle dernier, en étaient toujours à leurs balbutiements. En particulier, la théorie des probabilités a certes été initiée par Pascal et Fermat au début du XVII$^{\text{ème}}$ siècle, puis étudiée par de grands mathématiciens tels Cournot, Laplace, Poisson, Bernoulli, de Moivre, Gauss, ... ; mais, c'est à Henri Poincaré que peut être attribuée une des premières réflexions sur la véritable nature de ce qui est aléatoire : ce dernier considérait le hasard comme le résultat d'effets cumulés de causes multiples ; il montra notamment que le hasard peut résulter de l'évolution d'un système sensible aux petites perturbations, ce qui donna naissance à l'étude des phénomènes chaotiques.

C'est précisément un élève de H. Poincaré, à savoir Louis Bachelier, qui fut un des premiers pionniers dans l'étude mathématique de l'évolution d'indices boursiers.

3 L'oeuvre novatrice de Louis Bachelier

Louis Bachelier est né en 1870, au sein d'une famille fréquentant les milieux financiers. Il décèda en 1946.

Il étudia les mathématiques à la Sorbonne à Paris et, le 29 mars 1900, y défendit une thèse de doctorat intitulée "Théorie de la spéculation", avec Henri Poincaré comme promoteur. Par la suite, il fut également l'auteur de plusieurs ouvrages originaux consacrés à des applications des probabilités.

Selon Bachelier, "le marché ne croît, à un instant donné, ni à la hausse ni à la baisse du cours vrai" (cité dans [6], p. 31). Il supposait que le cours d'un actif fixé par le marché se comporte, d'un point de vue mathématique, comme la fortune (c'est-à-dire le gain algébrique cumulé) obtenue dans un jeu de hasard : à tout instant, un actif peut augmenter ou diminuer de façon apparemment aléatoire, mais conformément au *principe de l'espérance mathématique* qui, d'après ses propres termes, peut s'énoncer comme suit[9] :

> *les opérations de Bourse sont soumises à la loi de l'offre et de la demande et de même que tout spéculateur est libre d'entreprendre soit une opération, soit son inverse, on ne peut admettre qu'une opération de spéculation favorise*

[9] Voir [38], p. 80.

> *ou défavorise a priori l'un des contractants ... C'est ce que l'on exprime en disant : l'espérance mathématique de toute opération est nulle ...*
>
> *Ce principe s'applique à toute opération, quelle qu'en soit la complexité, qui serait basée sur les mouvements ultérieurs des cours.*

En d'autres termes, la valeur présente du cours en bourse est le barycentre des valeurs, pondérées par leur probabilité, du cours à un instant ultérieur.

En conséquence, les cours boursiers apparaissent comme étant ce qui est appelé de nos jours des *martingales*, c'est-à-dire des processus aléatoires jouissant de la propriété de transitivité des barycentres, selon laquelle le barycentre des barycentres est encore le barycentre[10].

Il convient toutefois de remarquer que les mathématiciens emploient ce mot martingale dans un autre sens que celui utilisé couramment dans les jeux de hasard ; en effet, une martingale pour un joueur désigne communément une stratégie qui est censée lui procurer un gain, au contraire de la martingale des mathématiciens pour laquelle le gain espéré est nul.

Le mathématicien français admettait encore que les accroissements de l'actif durant les instants successifs sont indépendants et, par un raisonnement infinitésimal semblable à celui que suivront ultérieurement des savants réputés tels que Einstein (1905), Langevin (1908), Levy (1948) ou Ito (1951), il obtint une équation aux dérivées partielles, qu'il appela *équation du rayonnement de probabilité*, qui ressemble à celle obtenue par J. Fourier un siècle plus tôt pour décrire la propagation de la chaleur dans les corps homogènes. Il montra ainsi

[10] Rappelons en nous référant à la définition de Xavier Hubaut que *La notion de barycentre ou de centre de masse est directement empruntée à la physique. Etant donné un ensemble de points massiques, un champ (homogène!) de pesanteur définit en chacun des points une force (le poids) d'intensité proportionnelle à la masse. Le barycentre ou centre de masse est le point d'application de la résultante de cet ensemble de forces parallèles. La résultante a une intensité correspondant à une masse égale à la somme des masses de tous les points du système. Un simple calcul montre que pour calculer le barycentre d'un ensemble de points massiques, on peut remplacer un sous-ensemble quelconque de points par son barycentre affecté de la masse somme (supposée non nulle).*

que la probabilité qui régit le cours futur d'un actif financier suit une distribution gaussienne centrée de plus en plus aplatie, dont l'écart-type s'accroît comme la racine carrée du temps écoulé.

Ses idées, qui s'avéreront poutant très fécondes ultérieurement, ne furent appréciées de son vivant que par le probabiliste russe Kolmogorov, dont les travaux éclipsèrent néanmoins ceux du français. Les mérites de ce dernier ne furent reconnus par le milieu scientifique qu'une vingtaine d'annnées après sa mort ; par exemple, sa thèse fut critiquée par les mathématiciens de l'époque et ne fut reçue qu'avec la mention "honorable" ; par ailleurs, il n'obtint un poste académique, à l'Université de Besançon, qu'à l'âge de 57 ans.

L'explication principale de la reconnaissance tardive concernant l'importance des résultats obtenus par Bachelier réside vraisemblablement dans le développement insuffisant des mathématiques au début du XX$^{\text{ème}}$ siècle. En effet, pour légitimer les travaux du pionnier français, il manquait à cette époque une bonne assise des probabilités, notamment une théorie rigoureuse sur les variables aléatoires, ainsi que sur les processus, équations différentielles et intégrales stochastiques.

Toutefois, certains mathématiciens n'accordent toujours pas à Bachelier la place qui lui revient en argumentant du manque de rigueur mathématique de ses résultats. Ce point de vue n'a pas de sens. Comme le signale David Forfar de la Heriot-Watt University[11] :

> *It seems that Bachelier, was regarded as being of lesser importance in the eyes of the French mathematical élite (Hadamard, Borel, Lebesgue, Lévy, Baire). His mathematics was not rigorous (it could not be as the mathematical techniques necessary to make it so had not been developed e.g. measure theory and axiomatic probability) although, his results were basically correct.*

L'auteur va plus loin en affirmant :

> *Five years before Einstein's famous 1905 paper on Brownian Motion, in which Einstein derived the equation (the*

[11] Voir [19].

> *partial differential heat/diffusion equation of Fourier) governing Brownian motion and made an estimate for the size of molecules, Bachelier had worked out, for his Thesis, the distribution function for what is now known as the Wiener stochastic process (the stochastic process that underlies Brownian Motion) linking it mathematically with the diffusion equation. The probabilist William Feller had originally called it the Bachelier-Wiener Process. It appears that Einstein in 1905 was ignorant of the work of Bachelier.*
>
> *Seventy three years before Black and Scholes wrote their famous paper in 1973, Bachelier had derived the price of an option where the share price movement is modelled by a Wiener process and derived the price of what is now called a barrier option (namely the option which depends on whether the share price crosses a barrier). Black and Scholes, following the ideas of Osborne and Samuelson, modelled the share price as a stochastic process known as a Geometric Brownian Motion (with drift).*

C'est pourquoi, il convient d'ouvrir une seconde digression non financière en exposant quelques avancées des mathématiques de la première moitié du siècle précédent. Comme l'a écrit Nicolas Bouleau[12] :

> *ainsi qu'il arrive de façon récurrente en histoire des sciences, les concepts utiles pour la gestion de ce qu'on appelle les "nouveaux produits financiers", ou "produits dérivés", ont été fournis par les mathématiques alors qu'ils avaient été élaborés pour l'étude de phénomènes complètement différents : agitation thermique, mouvement brownien, analyse spectrale des signaux, filtrage des bruits, ... Plus précisément, les concepts mathématiques qui ont renouvelé la finance et qui sont utilisés quotidiennement à Chicago, Paris, Londres ou Singapour, ont été élaborés au sein des mathématiques pures, c'est-à-dire à partir de questionnements internes aux mathématiques*

[12] Voir [6], p. 35.

4 Intermède mathématique

Différents travaux purement mathématiques du début du siècle dernier eurent une influence essentielle sur le développement de la théorie du mouvement brownien, et plus généralement de la finance stochastique ; ce fut notamment le cas pour des travaux sur le concept de *mesure* et le *calcul des probabilités.*

Ainsi, Henri Lebesgue introduisit, en 1901, une nouvelle intégrale généralisant la classique intégrale de Riemann et s'adaptant en particulier aux espaces abstraits exploités en statistique moderne ; les travaux de Lebesgue furent prolongés par plusieurs mathématiciens célèbres tels que Stieltjes, Borel, Radon, Denjoy, ...

Par ailleurs, Kolmogorov donna au calcul des probabilités des fondations solides. Durant les années 1920, il proposa une présentation axiomatique des probabilités à l'aide de la théorie de la mesure ; vers 1930, il étudia les processus stochastiques et travailla sur les processus de Markov et les processus stationnaires ; il parvint ainsi à établir le lien entre les travaux des physiciens Einstein et Smoluchovski sur les trajectoires browniennes et ceux de Bachelier.

Dès les années 1920, l'autrichien Norbert Wiener exploita les découvertes mathématiques récentes pour étudier rigoureusement le mouvement brownien qui est depuis lors souvent appelé *processus de Wiener.*

D'un point de vue mathématique, il s'agit d'un processus aléatoire continu, c'est-à-dire une famille de variables aléatoires continues, sur un espace probabilisé qui doit vérifier certaines conditions mises en évidence dans les travaux antérieurs de Bachelier et d'Einstein : de façon plus précise, il s'agit d'un processus stochastique $W(t)$ tel que

$$W(0) = 0$$

$$W(t) - W(s)$$

suit une distribution normale de moyenne nulle et de variance proportionnelle à $t - s$ (pour $s < t$), et pour lequel

$$W(t_2) - W(t_1)$$

$$W(t_3) - W(t_2)$$

et

$$W(t_n) - W(t_{n-1})$$

sont indépendants pour $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ ([35], p. 123).

Wiener démontra en 1923 l'existence d'un tel processus ; il introduisit également une *intégrale stochastique* : il s'agit d'une intégrale de nature aléatoire qui s'appuie sur le concept de mouvement brownien.

Présentons de façon intuitive l'idée d'intégrale de Wiener par l'examen d'un problème financier. Si une personne achète une unité d'une action le premier janvier et qu'elle la revend douze mois plus tard, son bénéfice algébrique sur l'année est égal à la différence entre le cours de cet actif en fin d'année et celui au début de l'année : il s'agit d'un gain ou d'une perte selon que cette différence est positive ou négative ; si elle achète, dans les mêmes conditions, c unités de cette action, son bénéfice algébrique vaut évidemment c fois cette le bénéfice sur une action.

Mais, en général, le financier ne se contente pas d'une seule opération sur l'année : plusieurs fois par an, il revend une partie de son avoir ou il achète de nouvelles parts ; ainsi, pour tout temps t (exprimé en années, avec $t \in [0,1]$), sa mise dépend du temps et peut s'écrire sous la forme $f(t)$.

Admettons que cette mise change n fois sur l'année, après chaque période de durée $\frac{1}{n}$, et que le cours de l'action suive un mouvement brownien donné par l'équation

$$z(t) = \eta\sqrt{t}$$

à l'instant t : le bénéfice algébrique sur l'année sera donné par

$$\begin{aligned} f(0)\left[z\left(\frac{1}{n}\right) - z(0)\right] \quad &+ \quad f\left(\frac{1}{n}\right)\left[z\left(\frac{2}{n}\right) - z\left(\frac{1}{n}\right)\right] + \ldots \\ &+ \quad f\left(\frac{n-1}{n}\right)\left[z(1) - z\left(\frac{n-1}{n}\right)\right] \end{aligned}$$

La limite de cette somme quand n tend vers l'infini est une intégrale de Wiener ; elle est aléatoire en même temps que les valeurs boursières. En exploitant la théorie moderne de la mesure, Wiener et certains de ses contemporains (parmi lesquels il y a lieu de mettre en évidence le français Paul Lévy) démontrèrent de nombreuses propriétés remarquables de tels processus stochastiques, notamment la continuité mais la non différentiablilité des trajectoires, le caractère infini de la variance totale.

Dans les années 1940, le mathématicien japonais Kiyosi Ito prolongea les travaux de ses prédécesseurs et parvint à introduire le concept d'*intégrale d'Ito* qui étend celle de Wiener à des fonctions elles-mêmes aléatoires, pourvu que celles-ci n'anticipent pas le mouvement brownien considéré.

Ce nouvel outil mathématique convenait mieux aux financiers que l'intégrale de Wiener : en effet, la mise quotidienne du spéculateur n'est pas déterministe, mais fluctue en fonction du marché financier ; ainsi, la fonction de mise $f(t)$ et le mouvement brownien de l'action $z(t)$ sont tous deux aléatoires et, de plus, il y a non-anticipation de $z(t)$ sur $f(t)$, ce qui signifie que le spéculateur ne peut pas prévoir quel sera le cours de l'action à l'instant suivant.

Les travaux du mathématicien japonais, encore largement exploités de nos jours, furent rendus célèbres grâce à la *formule d'Ito* : il s'agit de la version stochastique de la formule des accroissements finis [13] en analyse classique et s'avère très féconde dans la théorie des *équations différentiellles stochastiques*.

Les recherches purement théoriques sur le mouvement brownien ont débouché sur de nombreuses applications variées. Les processus stochastiques permettent de modéliser de façon réaliste tout *bruit blanc*, c'est-à-dire toute perturbation aléatoire engendrant des fluctuations non prévisibles dues à des circonstances extérieures et non contrôlées, mais qui ne modifient pas la tendance générale décrivant le plus correctement possible, compte tenu des informations disponibles, l'évo-

[13]La formule d'Ito permet le calcul de la différentielle de la fonction $f(\xi(t), t)$ où ξ est un processus stochastique qui obéit à une équation faisant intervenir un "mouvement brownien standard" $w(t)$ et de la forme $d\xi(t) = a(t)dt + b(t)dw(t)$; la formule d'Ito s'écrit alors ([31], p. 17)

$$df(\xi(t), t) = \left[f'_t(\xi, t) + f'_x(\xi, t)a(t) + \frac{1}{2}f"_{xx}(\xi, t)b^2(t)\right] dt + f'_x(\xi, t)b(t)dw(t).$$

lution future attendue du phénomène étudié.

Cette propriété peut être exploitée, par exemple, dans une étude portant sur l'agitation thermique, l'analyse des signaux, le filtrage de bruits, ... Signalons encore les liens, découverts par Kakutani puis étudiés par Doob, entre le mouvement brownien et la théorie du potentiel.

Terminons ce passage en relevant l'avènement, durant la seconde moitié du siècle dernier, de l'analyse non standard qui, d'une part, réhabilite les infiniment petits exploités par les précurseurs de l'analyse mathématique puis abandonnés par leurs successeurs, et d'autre part, permet un passage fort naturel de modèles discrets en leur homologue continu [4].

5 Le modèle de Black et Scholes

Il était somme toute plutôt tentant d'exploiter le mouvement brownien en finance, puisque le cours de la bourse semblait se comporter comme un processus de Wiener et que l'intégrale d'Ito s'avèrait particulièrement bien adaptée pour calculer le gain cumulé d'un spéculateur en bourse.

Comme les résultats de Bachelier ne furent guère considérés durant la première moitié du XX$^{\text{ème}}$ siècle, ce furent les travaux de Markowitz (1952) et Tobin (1958) qui ouvrirent réellement la voie à l'introduction du calcul stochastique en finance. Ces deux économistes élaborèrent notamment une théorie du marché efficient : ils firent intervenir le temps et le hasard dans leurs réflexions, et introduisirent l'idée de la diversification du risque statique reposant sur la répartition des actifs au sein d'un portefeuille.

En 1965, Samuelson démontra que certains cours boursiers sont des martingales mathématiques. Ses travaux, qui lui valurent de recevoir en 1970 le prix Nobel d'Economie, le conduisirent notamment à introduire en finance des outils mathématiques modernes et sophistiqués comme l'intégrale stochastique et la formule d'Ito.

C'est principalement depuis les années 1970 que la finance stochastique contemporaine s'est développée. En plus de la mise à la disposition des financiers d'outils mathématiques puissants permettant, pour la toute première fois, d'attribuer un prix aux produits dérivés, deux autres raisons peuvent expliquer cette émergence.

D'une part, il y eut à cette époque la volonté politique d'internationaliser et de déréglementer les marchés financiers, ce qui augmenta les risques des firmes, rendit les taux d'intérêt volatiles et les taux de change instables ; c'est pour couvrir ces nouveaux risques que les *produits dérivés* furent développés.

A cet effet, Black, Scholes et Merton (1973) eurent l'idée originale et novatrice d'une *stratégie d'investissement dynamique* : ils préconisèrent de diversifier le risque sur le temps entre le moment présent et la maturité du produit financier, et aboutirent à l'existence d'une "stratégie dynamique optimale, explicitement calculable, supprimant tous les risques possibles dans tous les scénarios de marché" [23].

D'autre part, une révolution conceptuelle relative au traitement du risque et des contrats à terme vit le jour durant ces mêmes années 1970 : elle a consisté à remplacer une *rationalité d'experts* par une *rationalité de marchés.*

En effet, depuis le début du siècle dernier avec les travaux de Bachelier et jusqu'aux années 1960, la vente d'un titre à terme se réalisait selon ce cas de figure : quand une banque souhaitait une option, par exemple à 6 mois, elle fixait un prix en augmentant d'une marge bénéficiaire la valeur espérée du titre, c'est-à-dire la moyenne attendue de ses valeurs probables dans 6 mois, les probabilités correspondantes étant évaluées par des experts en analyse économique.

Mais une rupture épistémologique se produisit avec les travaux scientifiques de l'époque qui eurent pour effet de réduire l'expertise des prévisionnistes en accordant une plus grande importance à l'information fournie par le fonctionnement même des marchés financiers.

Pour illustrer cette nouvelle approche de la gestion du risque et de l'anticipation financière, reprenons l'exemple précédent relatif à une option dans 6 mois. Les achats et ventes pendant la période considérée "permettent à la banque de réaliser exactement le contrat, à un montant fixe près que l'on peut calculer dès le départ.

Et ce montant fixe devient nécessairement le prix du contrat à terme, car, si la transaction se faisait à un prix différent, ou bien la banque, ou bien le client, *en se servant du marché*, pourrait réaliser un profit de façon certaine. En d'autres termes, c'est le seul prix qui empêche tout arbitrage : il supprime toute possibilité de profit sans risque.

Le marché exprime lui-même le hasard que l'on redoute, si bien qu'en tenant compte du marché à chaque instant on parvient véritablement à *abolir le hasard*. Il y a un miracle mathématique. Cela permet la couverture exacte d'un contrat. En procédant ainsi une banque exploite vraiment les possibilités que lui offrent les marchés organisés qui lui fournissent continûment une cote instantanée pour vendre ou pour acheter.

Le principe de la couverture des contrats est d'une logique implacable. Il a permis l'essor rapide des produits dérivés et des marchés organisés correspondants" ([6], p. 16).

Techniquement, deux chercheurs américains, Fisher Black et Myron Scholes, ont montré, dans un article publié en 1973 [14] que le calcul stochastique est parfaitement adapté pour calculer le *juste prix* d'une option ; ce travail, également réalisé la même année mais indépendamment par Robert Merton, a valu à celui-ci, ainsi qu'à Scholes, de recevoir le Prix Nobel d'Economie en 1997, Black étant décédé entre-temps.

Le célèbre *modèle de Black et Scholes* exprime que, sous certaines conditions, le cours S d'une action suit un processus d'évolution aléatoire obéissant à l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz$$

où dS désigne la variation du cours pendant un laps de temps infinitésimal égal à dt, μ caractérise le taux de croissance à long terme et vaut l'espérance du *return instantané* $\frac{dS}{S}$, σ quantifie la *volatitilité* ou encore l'amplitude des variations erratiques relativement à la *tendance* (ou *trend*) décrite par la composante purement déterministe

[14] Cet article fut publié en mai/juin 1973 dans la revue *Journal of Political Economy*, après avoir subi plusiers rejets ... ce qui tendrait à confirmer la difficulté de faire admettre des idées originales !

μdt, dz se rapporte à un mouvement brownien qui décrit les perturbations instantanées non prévisibles affectant la tendance.

La formule de Itô permet de démontrer que la solution de cette équation différentielle stochastique, qui est unique à cause de l'hypothèse d'absence d'arbitrage [15], est donnée par :

$$S(t) = S(0)e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t}e^{\sigma z(t)}$$

cette solution peut être comparée à celle, $S(0)e^{\mu t}$, de l'équation différentielle ordinaire obtenue en univers déterministe, à savoir

$$dS = \mu S dt$$

En premier lieu, tout semble se passer comme si la volatilité tempérait, d'une valeur égale à $\frac{\sigma^2}{2}$, le taux d'accroissement du cours initial. Nous avons vu que ce n'était pas vraiment le cas et que l'on pouvait en fait écrire l'équation d'évolution comme le produit de l'équation en univers déterministe et d'un mouvement brownien géométrique compensé :

$$S(t) = S(0)e^{\mu t}e^{-\frac{\sigma^2}{2}+\sigma z(t)}$$

Par contre, le fait que la partie stochastique de la solution prenne la forme d'une exponentielle dont l'exposant comprend un mouvement brownien $z(t)$ est interpellant : ce processus ayant un écart-type de l'ordre de la racine carrée du temps, des fluctuations autour de la tendance seront inévitablement, à un moment ou à un autre, plus importantes que par le passé.

Le modèle de Black et Scholes est très souvent utilisé pour les actifs boursiers ; il traduit assez bien l'incertitude quant à leur évolution, tout en permettant une spéculation sécurisée qui évite des pertes trop importantes. Les résultats de Black, Scholes et Merton ont permis l'essor des options sur les marchés financiers.

D'un point de vue épistémologique, il est même intéressant de constater que "le modèle a été le moteur d'une création de marchés financiers gigantesques", ce qui amena Merton lui-même à penser que "Price formula will be a self-fulling prophecy" (cité dans [34]).

[15]Cette hypthèse traduit l'impossibilité de gagner à coup sûr de l'argent à partir d'un investissement nul [23].

Malgré toute son importance, ce modèle possède évidemment des limites. De fait, comme tous les modèles mathématiques, il peut générer des résultats non conformes à la réalité lorsque certaines de ses hypothèses ne sont pas satisfaites.

Parmi les hypothèses retenues par les concepteurs du modèle, épinglons les principales ([18], [47])[16] :

- Le prix du sous-jacent suit un mouvement brownien géométrique. Nous avons étudié ce type de processu stochastique en détails.

- La volatilité est connue à l'avance et supposée constante, alors qu'en réalité elle dépend de la maturité et du prix d'exercice de l'option (phénomène de *smile* [17]). Nous allons étudier dans la suite quelques variantes à la volatilité constante en tentant d'interpréter le type de variabilité que l'on a mis sur la volatilité. Encore une fois ce qui fait le succès d'un modèle c'est aussi la possibilité d'obtenir une solution explicite.

- Il est possible d'acheter et de vendre le sous-jacent à tout instant et sans coût de transaction.

- Il n'y a pas de distribution de dividende. Cette hypothèse fut rapidement levée en introduisant un taux de dividende qui compense le taux sans risque.

- Le taux d'intérêt est connu à l'avance et supposé constant. Cette dernière hypothèse fait l'objet de travaux récents mais ne conduit pas encore à des solutions explicites.

- Seules les options de type européen sont concernées.

En raison du cadre théorique dans lequel est construit le modèle, ce dernier possède donc forcément des inconvénients. Mentionnons-en deux qui nous semblent majeurs.

[16] Certaines ont déjà été supprimées ou affaiblies dans des variantes des résultats originaux.

[17] La volatilité implicite, dont il sera question ci-dessous, prend souvent la forme d'un sourire : elle est la plus basse à la monnaie et devient de plus en plus élevée au fur et à mesure qu'on s'éloigne de la monnaie [47].

- Il y a tout d'abord l'*effet d'emballement* dû au fait que les ordres d'achat et de vente sont souvent réalisés automatiquement, sans intervention humaine, d'après les indications fournies par le modèle, ce qui peut influencer fortement les cours aussi bien à la hausse qu'à la baisse. A titre d'exemple, considérons le cas d'une action X d'une société S.

  Cette dernière annonce des résultats moins bons que prévu, ce qui provoque une baisse du cours de X. La formule de couverture de Black et Scholes recommande à un vendeur de réduire dans son portefeuille le nombre d'actions de S.

  Comme tous les vendeurs tiennent le même raisonnement, le marché risque d'être confronté à un "effet boule de neige" conduisant à une baisse sensible du cours de X.

- Par ailleurs, le modèle de Black et Scholes a été construit selon une *dynamique infinitésimale*, et reste de ce fait "local". Il peut en effet s'avérer efficace pour de petites variations du cours, mais pas forcément pour des changements importants et soudains. En guise d'illustration anecdotique, rappelons que, quelques mois après avoir reçu le prix Nobel, Merton et Scholes furent impliqués dans l'échec du fonds d'investissement américain LTCM consécutif à une crise russe durant l'été 1998. Nous verrons dans la suite comment on peut interpréter la nature de ce caractère local.

Partie 2

Réflexions

sur la nature du raisonnement mathématique conduisant à l'équation de Black et Scholes

1 Introduction

Nous avons présenté de manière détaillée le raisonnement ayant conduit à la célèbre équation. Il semble toutefois qu'il soit possible de comprendre mieux encore ses tenants et aboutissants en ayant recours à une formulation mathématique simplifiée qui met en évidence certains principes et propose une réflexion à caractère plus philosophique. C'est ce que nous faisons dans le paragraphe qui suit avant de nous interroger sur la pertinence de certaines hypothèses et de certains commentaires que l'on rencontre dans la littérature.

2 Le raisonnement et la mise en équation

Considérons deux produits financiers relevant de la même source d'incertitude que nous modélisons par un processus de Wiener $W(t, \omega)$ pour utiliser les notations (en majuscule) de l'article originel signé par nos deux innovateurs dans leur célèbre article de 1973.

Nous faisons l'hypothèse (largement commentée plus haut) que chacun de ces produits à une évolution pouvant être décrite par un mouvement brownien dit *géométrique*. Lorsque nous utilisons une paramétrisation fonction du temps (et non plus constante), cette hypothèse n'a rien de restrictif.

Notons $S_1(t)$ et $S_2(t)$ les deux produits en questions et supposons (ce qui n'a jusqu'ici rien de restrictif) que l'on puisse écrire :

$$\frac{dS_1(t)}{S_1(t)} = \mu_1(t)dt + \sigma_1(t)dW(t) \tag{1}$$

et

$$\frac{dS_2(t)}{S_2(t)} = \mu_2(t)dt + \sigma_2(t)dW(t) \tag{2}$$

Un portefeuille $P(t, \omega)$ peut alors être constitué par l'achat d'une quantité X_1 d'actifs S_1 et la vente d'une quantité X_2 d'actifs $S_2(t)$. Remarquons ici que les quantités X_1 et X_2 sont supposées constantes pendant l'intervalle de temps (très court) que nous allons considérer. On suppose aussi (et c'est moins réaliste) que ces valeurs sont réelles. Le portefeuille $P(t)$ dépend bien évidemment de la même source d'incertitude $W(t, \omega)$. On a ici :

$$P(t) = X_1S_1(t) - X_2S_2(t) \tag{3}$$

et donc on peut écrire[18] :

$$dP(t) = X_1dS_1(t) - X_2dS_2(t) \tag{4}$$

Nous commenterons plus loin l'hypothèse de la constance des quantités X_1 et X_2. Notre équation prend la forme :

$$\begin{aligned} dP(t) &= X_1[S_1(t)\mu_1(t)dt + S_1(t)\sigma_1(t)dW(t)] \\ &\quad -X_2[S_2(t)\mu_2(t)dt + S_2(t)\sigma_2(t)dW(t)] \end{aligned} \tag{5}$$

La source d'incertitude étant identique, on peut formellement en annuler les effets sur le portefeuille $P(t)$, à l'instant t, en posant :

$$X_1S_1(t)\sigma_1(t) - X_2S_2(t)\sigma_2(t) = 0$$

Cette relation permet de déterminer les proportions à investir dans chacun des actifs[19] :

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{S_2(t)\sigma_2(t)}{S_1(t)\sigma_1(t)} \tag{6}$$

Assez curieusement, on constate que ce rapport dépend du temps. L'équilibre est donc instantané, susceptible d'être modifié dans l'instant qui suit.

[18] Et, mathématiquement, on comprend la nécessité de la constance des quantités X_1 et X_2.

[19] C'est ici qu'intervient l'hypothèse du domaine réel des quantités X_1 et X_2.

Un portefeuille obéissant à cette élimination instantanée du risque sera noté $P^*(t)$ avec :

$$\begin{aligned} P^*(t) &= X_1 S_1(t) - X_1 \frac{S_1(t)\sigma_1(t)}{S_2(t)\sigma_2(t)} S_2(t) \\ &= X_1 S_1(t) \left[1 - \frac{\sigma_1(t)}{\sigma_2(t)}\right] \end{aligned}$$

et bien entendu :

$$dP^*(t) = X_1 S_1(t)\mu_1(t)dt - X_2 S_2(t)\mu_2(t)dt$$

que l'on peut écrire encore en utilisant (6):

$$dP^*(t) = X_1 S_1(t) \left[\mu_1(t) - \frac{\sigma_1(t)}{\sigma_2(t)}\mu_2(t)\right] dt$$

On constate ici que ce portefeuille dit *sans risque* dépend bien des volatilités instantanées des actifs qui le composent. Cet aspect paradoxal est lié au caractère local de la mise en équation.

Dans un marché idéal, il ne devrait pas être possible de gagner de l'argent sans prendre de risque. Nous savons bien entendu que les marchés ne sont pas efficients et qu'il existe de multiples opportunités de transgresser cette loi mais l'idée est qu'une valorisation et donc une modélisation saine d'un produit doit être basée sur ce principe. On en déduit donc que notre protefeuille $P^*(t)$, de tout risque débarassé, doit être rémunéré, à l'instant t, au taux sans risque court terme $r(t)$ associé à cet instant.

On note alors pour tout portefeuille sans risque :

$$\frac{dP(t)}{P(t)} = r(t)dt \tag{7}$$

Dans le cas particulier de notre portefeuille $P^*(t)$, on arrive à :

$$\begin{aligned} dP^*(t) &= X_1 S_1(t) \left[\mu_1(t) - \frac{\sigma_1(t)}{\sigma_2(t)}\mu_2(t)\right] dt \\ &= X_1 S_1(t) r(t) \left[1 - \frac{\sigma_1(t)}{\sigma_2(t)}\right] dt \end{aligned} \tag{8}$$

Cette double égalité conduit à l'équation :

$$\mu_1(t) - \frac{\sigma_1(t)}{\sigma_2(t)}\mu_2(t) = r(t)\left[1 - \frac{\sigma_1(t)}{\sigma_2(t)}\right] \tag{9}$$

qui conduit sans peine à la relation d'équilibre

$$\frac{\mu_1(t) - r(t)}{\sigma_1(t)} = \frac{\mu_2(t) - r(t)}{\sigma_2(t)} \tag{10}$$

que l'on peut interpréter comme suit :

> *Dans un marché efficient, il y a égalité des accroissements de rendement par unité de volatilité.*

Cette relation introduit explicitement la notion de constante de marché efficient. On note :

$$\frac{\mu_1(t) - r(t)}{\sigma_1(t)} = \frac{\mu_2(t) - r(t)}{\sigma_2(t)} = \lambda(t) \tag{11}$$

3 La nature locale de l'équilibre

Il nous semble opportun, à la lumière de cette présentation générale de nous interroger sur la nature *locale* du résultat qui vient d'être obtenu.

Tout d'abord, précisons que l'équation (10) se réduit bien à l'équation de Black et Scholes lorsque l'actif S_2 est une option call sur l'actif S_1, que les paramètres μ_1 et σ_1 sont constants et que l'on fait usage de la formule de Itô pour calculer explicitement les paramètres μ_2 et σ_2.

Nous avons vu que l'hypothèse de constance des quantités X_1 et X_2 permettait la mise en équation. On admet en effet qu'entre l'instant t et l'instant infiniment proche $t + dt$ il n'est pas possible d'effectuer de transaction.

Le problème est que les actifs subissant la même source d'incertitude $W(t)$ évoluent quant à eux (du moins en théorie) totalement continument.

On peut donc, toujours théoriquement, déterminer le rapport $\frac{X_1}{X_2}$ pour toute valeur de t. Ce qui contredit l'hypothèse de constance.

Pour lever le paradoxe, il faut faire la distinction entre l'évolution des actifs, réellement discrète mais *représentée* par un modèle continu, et la gestion d'un portefeuille pour laquelle les transactions par nature discrètes ont lieu en des instants précis, en nombre fini, et devraient donc être modélisés par la notion probabiliste de *temps d'arrêt*.

Cette façon de voir permet d'éliminer une autre hypothèse restrictive. Nous avons en effet supposé les quantités X_1 et X_2 définies sur l'ensemble des réels. Or les transactions se font par unité. Le rapport $\frac{X_1}{X_2}$ doit donc être rationnel et la précision de ce rapport est évidemment fonction de la valeur du portefeuille. Plus le nombre d'actifs est important, plus grande est la précision du rapport.

L'utilisation des temps d'arrêt arrange tout. Les transactions ont lieu lorsque le rapport

$$\frac{X_1}{X_2}$$

établi théoriquement et calculable en fonction du temps au moyen de (6) peut être approché de manière plus précise dans le monde réel au moyen d'un nombre rationnel compatible avec l'avoir de l'investisseur.

Remarquons encore pour finir que la nature de la source d'incertitude n'intervient pas dans l'équation d'équilibre. Une source différente affectant des actifs différents mais paramétrés identiquement conduirait exactement à la même relation. La constante de marché exprimant l'accroissement de rendement par unité de risque (volatilité) est donc indépendante de la source d'incertitude.

4 La disparition de la tendance du sous-jacent

L'établissement de l'équation de Black et Scholes se fait par transformation de (10) en tenant compte des hypothèses de constance des paramètres et en utilisant la formule de Itô. On arrive alors en notant C la valeur du call (et qui joue donc ici le rôle de S_2), à l'équation bien connue :

$$C'_t + rS_1C'_S + \frac{\sigma_1^2}{2}S_1^2C"_{SS} - rC = 0.$$

On constate effectivement l'absence dans cette équation du paramètre μ_1, à savoir la tendance du sous-jacent.

Par contre la volatilité (supposée constante) est bien présente. Mais ne peut-on interpréter l'existence de la constante de marché efficient comme l'établissement d'une relation (linéaire) entre tendance et volatilité. On a en effet :

$$\mu_1(t) = r(t) + \lambda(t)\sigma_1(t)$$

Sous cet éclairage, la connaissance de la volatilité induit celle de la tendance de l'actif dans un marché efficient. L'apparition du paramètre μ_1 dans l'équation serait alors tout simplement redondante, sa valeur étant induite par les autres paramètres du modèle.

Partie 3

Hypothèses sous-jacentes

aux extensions récentes

du modèle de de Black et Scholes

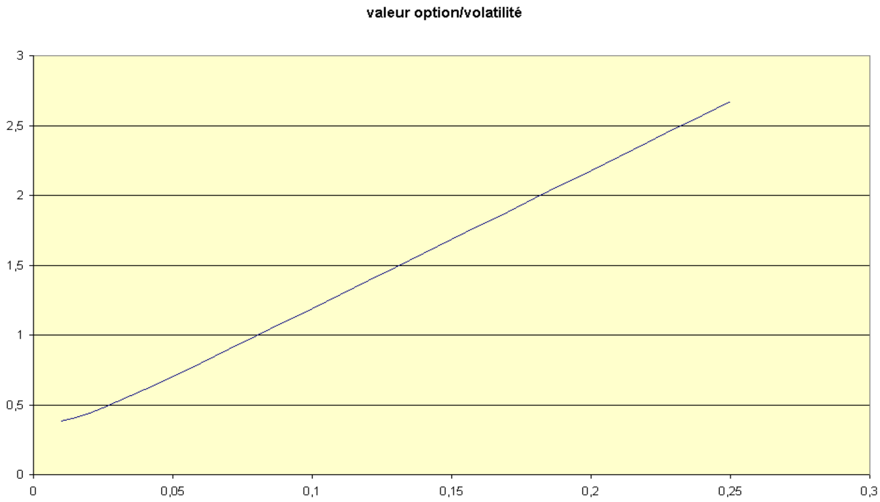
1 Introduction

Nous l'avons vu, certaines hypothèses sous-tendant l'établissement de la formule de valorisation explicite d'options européennes selon l'article de Black et Scholes ne sont pas réalistes. Depuis sa parution en 1973, plusieurs modèles alternatifs ont été avancés qui, chacun, levaient une partie de ces hypothèses simplificatrices.

La principale critique qui fut faite relativement au modèle initial est essentiellement la constance de la volatilité. Mais force nous est de constater que la marché n'utilise pas *vraiment* la formule de Black et Scholes si ce n'est de manière implicite.

Partant de la valeur marché d'une option, les autres parties constituantes de la formule étant connue, on peut calculer *a posteriori* la volatilité implicite ayant conduit à la valorisation constatée.

Partons d'un exemple. Considérons un actif d'une valeur de 50 euros, et une option call sur cet actif de prix d'exercice 50 euros dans 3 mois. Représentons la valeur de ce call sur cet actif en fonction de la volatilité du sous-jacent, en faisant usage de la formule de Black et Scholes, et en optant pour un taux sans risque de 0.03. On obtient le graphique :



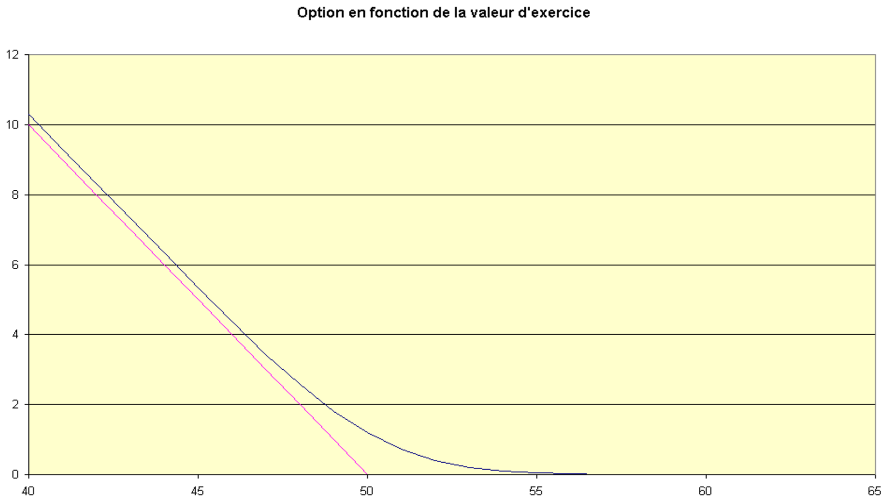
La fonction obtenue est strictement croissante[20] ce qui implique l'existence de sa réciproque. La valeur marché de l'option permet ainsi de déduire la volatilité implicite du sous-jacent.

Le problème est qu'en procédant ainsi pour des horizons τ différents, ou pour des valeur d'exercice K différentes, on obtient des volatilités implicites différentes pour le même sous-jacent.

On peut comprendre aisément pourquoi. La formule de Black et Scholes sous-estime terriblement la *valeur temps* des options fortement "in" ou "out the money". Ce que la marché ne peut accepter.

Montrons le encore une fois sur un exemple. Considérons la même option que plus haut, avec une volatilité de 0.1 mais en faisant varier cette fois la valeur d'exercice. On obtient le graphique :

[20]Ce qui se comprend bien : une volatilité accrue accroît la probabilité de grandes variations et donc rend crédible l'éventualité même peu probable de grands flux financiers positifs.



On le constate, les valeurs de l'option *out of the money* tendent très rapidement vers 0. Les valeurs *temps* des options *in the money* se situent au voisinage de 0.3 euros et diminuent plus lentement. Les valeurs des options pour des strikes supérieurs à 55 euros sont inférieures au centime d'euro. De petites variations du sous-jacent peuvent alors facilement faire doubler ou tripler ces valeurs. On conçoit que le marché ne se contente pas de la valorisation de Black et Scholes avec volatilité constante.

Des constatations similaires peuvent être faites à partir de variations de l'horizon temps de l'option.

C'est essentiellement la raison des fameux *smiles* de volatilité observés lors des mesures de volatilité implicite. Les acteurs du marché valorisent les options au moyen de volatilités dépendant explicitement des conditions de contrat. Dans la réalité, on a :

$$\sigma = \sigma(K, \tau)$$

C'est en tentant de lever l'hypothèse de constance de la volatilité que sont apparus les modèles suivants, que nous allons découvrir chronologiquement tout en discutant de leurs hypothèses implicites.

2 Chronologie des variations de variance

Fixons tout d'abord les notations en posant pour l'actif sous-jacent :

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW_1(t, \omega)$$

Dans le modèle initial, σ est supposé constant. L'existence de la constante de marché efficient implique alors que μ soit constant.

2.1 Le modèle de Hull, White et celui de Wiggins : 1987

Dans ces versions, la volatilité suit également un mouvement brownien géométrique. Les auteurs posent[21] :

$$\frac{d\sigma}{\sigma} = \zeta dt + \xi dW_2(t, \omega)$$

En toute généralité, les deux browniens intervenant dans la description peuvent être supposés corrélés en notant :

$$dW_1 dW_2 = \rho dt$$

La même année, Hull et White[22] ont traité le cas $\rho = 0$ tandis que Wiggins[23] présentait le cas général ($\rho \neq 0$).

Le fait de donner à la volatilité[24] une distribution lognormale implique que l'on estime que celle-ci peut croître indéfiniment ce qui manque peut-être de réalisme.

2.2 Le modèle de Johnson et Shanno : 1987

Le modèle proposé par Johnson et Shanno[25], toujours la même année, est basé sur une équation d'évolution du sous-jacent quelque peu

---

[21] Dans la suite nous noterons toujours le paramètre de tendance de la volatilité ζ et celui de sa volatilité ξ. Nous tentons ainsi d'uniformiser les notations des articles de référence.

[22] Voir [27].

[23] Voir [46].

[24] Notons que les premiers modèles donnaient proposent une dynamique pour la volatilité du sous-jacent et non pour la variance, ce qui sera le cas des modèles ultérieurs.

[25] Voir [30].

différente. En effet, les auteurs proposent la dynamique :

$$dS = \mu S dt + \sigma S^{\alpha} dW_1(t, \omega)$$

en supposant $\alpha \geq 0$. La volatilité σ suit quant à elle une équation différentielle stochastique de même nature :

$$d\sigma = \zeta \sigma dt + \xi \sigma^{\beta} dW_2(t, \omega)$$

toujours avec $\beta \geq 0$ et

$$E[dW_1 dW_2] = \rho dt$$

Les auteurs proposèrent une résolution numérique du problème par la méthode de Monte Carlo.

2.3 Le modèle de Scott 1 : 1987

L'idée d'une volatilité pouvant croître indéfiniment est évidemment irréaliste. Le premier, Scott[26] proposa une volatilité suivant un processus de type *retour à la moyenne* en lui appliquant un processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Il pose donc

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW_1(t, \omega)$$

et

$$d\sigma = \beta(\zeta - \sigma)dt + \xi dW_2(t)$$

La distribution de la volatilité est évidemment normale, ce qui implique la possibilité de valeurs négatives avec des probabilités strictement positives. Mais l'auteur précise :

> *The σ parameter is normally distributed and there is a possibility of negatives values, but the variance will be nonnegative.*

C'est cette considération qui va conduire Scott à proposer deux ans plus tard un modèle alternatif pour lequel c'est le logarithme du carré de la volatilité qui suit un processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Assez curieusement, tous les modèles vus jusqu'ici associaient la source

[26] Voir [43].

d'incertitude à la volatilité alors que leurs titres mentionnaient explicitement la variabilité de la *variance*.

Comme nous le verrons plus loin, la difficulté de mise en équation de tous ces modèles provient du fait que la double dépendance des produits dérivés, relativement à leur sous-jacent et à la volatilité de ce sous-jacent, demande l'utilisation de la formule de Itô bidimensionnelle. La construction d'un portefeuille sans rsique localement dans le temps, dépendant de deux sources d'incertitude, nécessite également l'introduction d'au moins deux options différentes d'horizon temps différent ou de valeurs d'exercices différentes. C'est cette particularité qui permet évidemment de tenir compte des smiles.

2.4 Le modèle de Scott 2 : 1989

Toujours en travaillant avec :

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW_1(t, \omega)$$

Scott pose finalement[27] :

$$d[ln(\sigma^2)] = \beta \left(\zeta - ln(\sigma^2) \right) dt + \xi dW_2(t)$$

en développant ainsi le premier modèle à variance variable. On note ici que les constructions successives sont faites à partir d'éléments de modèles pré-existant et que les auteurs ne construisent pas leurs équations descriptives à partir des observations du marché mais bien au départ de résultats théoriques déjà établis. La suite de l'histoire va exactement dans le même sens.

2.5 Le modèle de Stein et Stein : 1991

Ce dernier reprend le modèle de type *Scott 1* mais en supposant que les deux sources d'incertitude sont indépendantes. Les auteurs explorent toutes les possibilités du modèle.

[27] Ce modèle porte le nom de Logarithmic Ornstein Uhlenbeck Volatility, d'acronyme LOUV.

2.6 Le modèle de Heston : 1993

2.6.1 Hypothèses

C'est ce modèle[28] qui va finalement proposer la solution la plus unanimement acceptée aujourd'hui encore pour la valorisation d'options. Il combine des résultats antérieurs en les intégrant à un modèle global conduisant à une valorisation explicite.

Heston postule en effet que

- Le sous-jacent suit effectivement un mouvement brownien géométrique :
$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW_1(t, \omega)$$

- C'est la variance qui est affectée d'une source d'incertitude et non la volatilité.

- Cette variance suit non un processus d'Ornstein-Uhlenbeck (évidemment, vu la probabilité de valeurs négatives) mais l'un de ses clones du type *retour à la moyenne* développés par Cox Ingersoll et Ross[29] vers 1985:
$$d\sigma^2 = \beta\left(\zeta - \sigma^2\right) dt + \xi\sigma dW_2(t)$$

2.6.2 Mise en équation

Notre option *call* est à présent une fonction de deux sources d'incertitude, celle liée au sous-jacent et celle liée à sa volatilité. Ces deux sources sont corrélées[30]. Constituons comme précedemment un portefeuille P dépendant de notre sous-jacent et de deux options différentes que nous notons C_1 et C_2. Posons :

$$P(t) = X_1 C_1 - X_2 C_2 - X_3 S$$

Comme plus haut, les quantités X_1, X_2 et X_3 seront supposées constantes. Nous avons déjà critiqué ce point de vue. Les options C_1

[28] Voir [24].
[29] Voir [14].
[30] Mais on peut constater que cette corrélation n'affecte pas la partie aléatoire de l'équation d'évolution du portefeuille.

et C_2 dépendent de deux sources d'incertitudes dW_1 et dW_2. Le passage aux équations différentielles stochastique nécessite donc la formule de Itô bidimensionnelle. Cette dernière s'obtient sans problème à partir de la formule de Taylor pour des fonctions à trois inconnues, en se limitant à l'ordre 1 pour dt et en tenant compte du fait que

$$[dW_1(t)]^2 = dt$$

$$[dW_2(t)]^2 = dt$$

$$dW_1 dW_2 = \rho dt$$

Pour une fonction $C(t, S, \sigma)$ avec

$$\begin{aligned} dS &= a(S,t)dt + b(S,t)dW_1 \\ d\sigma &= c(\sigma,t)dt + d(\sigma,t)dW_2 \end{aligned}$$

on arrive à

$$\begin{aligned} dC = {} & b\frac{\partial C}{\partial S}dW_1 + d\frac{\partial C}{\partial \sigma}dW_2 + \\ & \left[\frac{\partial C}{\partial t} + a\frac{\partial C}{\partial S} + c\frac{\partial C}{\partial \sigma} + \frac{1}{2}b^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + \rho bd\frac{\partial^2 C}{\partial S \partial \sigma} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial \sigma^2}\right] dt \end{aligned}$$

Reprenons notre portefeuille pour lequel :

$$dP = X_1 dC_1 - X_2 dC_2 - X_3 dS$$

Considérons uniquement les coefficients des deux sources d'incertitude et annulons-les. On obtient pour dW_1 :

$$X_1 b\frac{\partial C_1}{\partial S} - X_2 b\frac{\partial C_2}{\partial S} - X_3 b = 0$$

ou encore :

$$X_1\frac{\partial C_1}{\partial S} - X_2\frac{\partial C_2}{\partial S} - X_3 = 0 \tag{12}$$

Et pour dW_2 :

$$X_1 d\frac{\partial C_1}{\partial \sigma} - X_2 d\frac{\partial C_2}{\partial \sigma} = 0$$

dont on tire :

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{\frac{\partial C_2}{\partial \sigma}}{\frac{\partial C_1}{\partial \sigma}} \tag{13}$$

ce qui permet pour une valeur donnée d'un portefeuille de déterminer les quantités X_1, X_2 et X_3. L'équation de Heston est alors donnée par

$$dP = rPdt$$

en tenant compte de (12) et de (13). Les changements de variable à effectuer sont dictés par la similitude entre l'équation de Heston et celle de Black et Scholes.

3 Epilogue

Grâce à ces nouveaux développements théoriques et à l'exploitation de l'outil informatique toujours plus accessible et plus puissant, de nombreuses extensions ont pu être apportées au modèle initial de Black et Scholes, notamment pour affaiblir les hypothèses et ainsi mieux adapter la théorie à la réalité [31]. A titre d'exemples, citons parmi d'autres :

- L'oeuvre de Benoit Mandelbrot : celui-ci s'efforça notamment d'affaiblir l'hypothèse relative au mouvement brownien qui est continu, pour ainsi prendre en considération des sauts enregistrés dans la pratique par les prix [38]. Mandelbrot a toujours considéré les mouvements browniens comme trop *sages* pour représenter efficacement les mouvements qu'il qualifie de *sauvages* des produits financiers.

- Les travaux de Robert Engel, qui reçut le Prix Nobel en 2003 : il a étudié les séries chronologiques avec une volatilité non constante. D'ailleurs, nous l'avons vu, de nombreuses recherches ont porté ces dernières décennies sur la levée de l'hypothèse de volatilité constante. Ces dernières ont conduit à un nouvel usage du modèle de Black et Scholes : alors qu'initialement ce dernier servait à calculer le juste prix d'une option, il fut ensuite exploité pour calculer de façon implicite la volatilité au

[31] A ce propos, nous adhérons aux idées de P. Embrechts, un réputé financier d'origne belge travaillant à la *London School of Economics* : "il ne faut pas moins, mais plus de maths.

En revanche, il faut davantage de réflexion critique : il s'agit de mieux communiquer les faiblesses d'une théorie et surtout de clarifier les hypothèses qui l'accompagnent." (cité dans [48]).

départ du prix du marché. Cette volatilité implicite sert alors à la valorisation de produits moins simples que les options *tout vanille*.

Il convient toutefois de se demander si cette démarche ne mène pas à une situation semblable à celle d'un "serpent qui se mord la queue" ?

- De nouvelles présentations ont été proposées. Ainsi, J. Cox, S. Ross et M. Rubinstein [12] ont présenté un modèle, également connu sous le nom de *modèle binomial*, qui est développé en temps discret avec des outils mathématiques moins sophistiqués que ceux utilisés pour le modèle continu de Black et Scholes, ce dernier pouvant apparaître comme étant un cas limite du modèle discret[32].

  Il est assez intéressant, d'un point de vue épistémologioque, de remarquer que le modèle discret, plus simple à comprendre que le continu, a été développé après ce dernier : ne serait-ce pas parce que le concept du continu est une construction des mathématiciens qui simplifie la réalité ?

  Par ailleurs, une autre présentation du modèle de Black et Scholes est due à van den Berg [45] et se fait dans le contexte des nombres hyperréels : l'auteur utilise l'analyse non standard [4] pour passer du modèle discret binomial au modèle continu de Black et Scholes et estime que "ceci nécessite un investissement en analyse non standard, mais pour un non mathématicien, il semble plus aisé et rentable à réaliser que pour acquérir les bases relatives aux processus stochastiques en temps continu qui font appel à une théorie de la mesure de haut niveau" ([45], p. vii).

Nous pouvons conclure en constatant que de nombreuses études théoriques et empiriques utilisant le modèle de Black et Scholes sont réalisées par des chercheurs, et ceux-ci sont de plus en plus souvent des mathématiciens professionnels exerçant leurs talents pour traiter des problèmes financiers.

Mais il ne faut peut-être pas perdre de vue cette réflexion émise par Black[33] lui-même à qui nous laissons le mot de la fin :

[32]Un modèle trinmial a également été proposé récemment.

[33]Voir [29].

Les opérateurs savent maintenant utiliser la formule et ses variantes. Ils l'utilisent tellement que les prix de marché sont généralement proches de ceux donnés par la formule, même lorsqu'il devrait exister un écart important.

Bibliographie

[1] Bachelier, L. (1900) : *Théorie de la spéculation, théorie mathématique du jeu*, Ann. Sc. Ecole Normale, t. 17.

[2] Bair J. (2000) : L'histoire du mouvement brownien : un exemple de recherches interdisciplinaires, *Mathématique et Pédagogie*, n° 129, pp. 19 - 27.

[3] Bair J. - Haesbroeck G. - Justens D. - Rosoux J. (1998) : *Modèles mathématiques en finance : de l'incohérence à l'incertitude ou au chaos*, Presses Ferrer, Bruxelles.

[4] Bair J. - Henry V. (2003) : De l'analyse classique à l'analyse non standard, *Les cahiers de la mathématique appliquée*, Presses Ferrer, Bruxelles, et Editions du Céfal, Liège, n° 1 pp. 51 - 74 et n° 2, pp. 75 - 96.

[5] Bernstein P.L. (1995) : *Des idées capitales*, PUF, Paris.

[6] Bouleau N. (1998) : *Martingales et marchés financiers*, Editions Odile Jacob, Paris.

[7] Briot J.M. - Esch L. - Kinon V. - Justens D. - Simon L. - Stiévenart T. (2000) : *Modélisation et gestion du risque en finance*, Presses Ferrer, Bruxelles.

[8] Carraro L. - Crepel P. (2002) : Louis Bachelier, *Aux origines de la finance mathématique*, Besançon, Presse de l'université de Franc-Comtoises, pp. 48 - 49 ; accessible sur le site : www.math.cnrs.fr/imagesdesmaths/

[9] Chabardes, P - Delclaux, F. (1996) : *Les produits dérivés*, Gualina éditeur.

[10] Chesney M. - Scott, L. (1989) : Pricing European Currency Options : a Comparison of the modified Black and Scholes Model and a Random Variance Model, *Journal of Financial and Quantitative analysis*, 3.

[11] Chouchan D. (2005) : Quand les financiers parient sur les mathématiques, dossier de la *Banque des savoirs*, site (consulté fin février 2007) : http://www.savoirs.essone.fr/dossiers/la-matiere/mathematiques/article/

[12] Cox J. - Ross S. - Rubinstein M. (1979) : Option pricing : a simplified approach, *Journal of Economics*, 7, pp. 259 - 261.

[13] COX, J.C. - INGERSOLL, J.E. - ROSS, S.A. (1985) : An intertemporal general equilibrium model of asset prices, *Econometrica*, **53-2**, pp. 363-384.

[14] COX, J.C. - INGERSOLL, J.E. - ROSS, S.A. (1985) : A theory of the term structure of interest rates, *Econometrica*, **53-2**, pp. 385-407.

[15] Devolder P. (1993) : *Finance stochastique*, Editions de l'Université de Bruxelles.

[16] Esch L. - Justens D. - Geuskens N. - Moeremans G. (2001) : *Modélisation de produits financiers à risque réduit*, Editions Luc Pire et Presses Ferrer, Bruxelles.

[17] Esch L. - Kieffer R. - Lopez T. (2003) : *Asset & risk Management : la finance orientée "risques"*, Editions De Boeck, Bruxelles.

[18] Euronext, *Modèle de Black et Scholes*, fiche pratique disponible sur le site (consulté en mars 2007) : www.matif.fr/monep/ecole/fichepratique_bs.htm

[19] Forfar, D (2007) : Biographie de Louis Bachelier, http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bachelier.html

[20] Geman H. (1998) : De Bachelier à Black-Scholes-Merton, *Gazette des mathématiciens*, 75, pp. 17 - 30.

[21] Gillet R. (1991) : Introduction aux processus d'évolution du prix des actions en temps continu et efficience du marché, *Recherches économiques de Louvain*, 57 (1), pp. 77 - 93.

[22] Gobet E., Les mathématiques appliquées au coeur de la finance, article accessible sur le site : www.math.cnrs.fr/imagesdesmaths/pdf2004/Gobet.pdf

[23] Gobet E. - Pagès G. - Yor M., Mathématique et finance, *Actes de la journée Mathématiques financières*, 1^{mboxer} février 2005, Académie des Sciences, Paris ; site internet : http://www.maths-fi.com/mathematiques-finance.asp.

[24] Heston, S. (1993) : A Closed-Form Solution for Options with Stochastic volatility with Applications to Bond an Currency Options, *Review of Financial Studies*, 6-2, pp. 327-343.

[25] Hida T. (1980) : *Brownian Motion*, Springer - Verlag, New York - Heidelberg - Berlin.

[26] Hoël P. - Port S. - Stone C. (1972) : *Introduction to Stochastic Processes*, Houghton Mifflin Company, Boston.

[27] Hull, J.C. - White, A. (1987) : The Pricing of Options an Assets with Stochastic Volatilities, *Journal of Finance*, 42, pp. 281-300.

[28] Hull J.C. (1998) : *Options, futures & other derivatives*, Prentice-Hall Int.

[29] Hulmann Y., Le modèle de Black-Scholes, déclic majeur à l'essor des dérivés, article accessible sur le site (consulté fin février 2007) : www.agefi.ch/resources/20050815_p03.pdf

[30] Johnson, H - Shanno, D (1987) : Option Pricing when the Variance is Changing, it Journal of Financial and Quantitative Analysis, 22-2, pp 143-151.

[31] Justens D. (1993) : *Modélisation stochastique de flux financiers actualisés*, thèse doctorale, Université de Liège.

[32] Justens D. - Schyns M. (1997) : *Théorie stochastique de la décision d'investissement*, de Boeck Université, Bruxelles.

[33] Kahane J.P. (2005) : De la biologie aux mathématiques en passant par la finance et la physique : le mouvement brownien, *Bulletin de l'APMEP*, n° 458, pp. 381 - 382.

[34] Kantor J.M., L'afflux des modèles, un modèle ?, article pouvant être consulté sur le site : www.math.jussieu.fr/ kantor/Modeles.pdf

[35] Lamberton D. - Lapeyre B. (1991) : *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*, Editions Ellipses, Paris.

[36] Lautier D. (2003) : Les options réelles : une idée séduisante - un concept utile et multiforme - un instrument facile à créer mais difficile à valoriser, texte présenté à l'Université Paris IX, le 25 janvier 2001, à l'occasion d'un colloque sur les options réelles, *Cahiers de l'ISMEA*, Paris.

[37] Le Gall J.F. (1989) : Introduction au mouvement brownien, *Gazette des mathématiciens*, 40, pp. 43 - 64.

[38] Mandelbrot B. (1997) : *Fractales, hasard et finance*, Editions Flammarion, Collection Champs, Paris.

[39] Oksendal B. (1992) : *Stochastic Differential Equations*, Springer - Verlag, Berlin - Heidelberg.

[40] Pardoux E. (1997) : La formule de Black et Scholes, *Bulletin de l'APMEP*, Spécial *Journées Nationales à Marseille*, pp. 281 - 290.

[41] Regnault J. (1863) : *Calcul des chances et philosophie de la Bourse*, Mallet- Bachelier, Paris.

[42] Schmitt, S. (2006) : De Brown au mouvement brownien, *Pour la science* N°339.

[43] Scott, L (1987) : Option Pricing whenthe variance Changes Randomly : Theory, Estimation and an Application, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 22-4, pp. 419-438.

[44] Stein, E - Stein, J (1991) : Stock Price Distributions with volatility : An Analytic Approach, *Review of Financial Studies*, 4, pp. 727-752.

[45] van den Berg I. (2000) : *Principles of Infinitesimal Stochastic and Financial Analysis*, World Scientific, Singapore - New Jersey - London - Hong Kong.

[46] Wiggins, J. (1987) : Option Values Under Stochastic Volatility - Theory and Empiric Estimates, *Journal of Financial Economics*, 19, pp. 351-372.

[47] Wikipédia, Modèle Black-Scholes, Un article de *Wikipédia, l'encyclopédie libre*, site (consulté le 15 février 2007) : fr.wikipedia.org/wiki/Mod%C3%A8le_Black-Scholes.

[48] Zaki M., L'imperfection des marchés financiers défie le monde des mathématiques, journal *Le Temps*, lundi 1er décembre 2003, article consultable sur le site : lthi-www.epfl.ch/~leveque/Proba/article.html

Table des matières

Partie 1: De Thalès à Black et Scholes **1**

1 Histoire d'une génèse **1**

2 Intermède scientifique, philosophique et historique **5**
2.1 Origines du mouvement brownien 5

3 L'oeuvre novatrice de Louis Bachelier **8**

4 Intermède mathématique **12**

5 Le modèle de Black et Scholes **15**

Partie 2: Réflexions sur le raisonnement mathématique conduisant à Black et Scholes **21**

1 Introduction **21**

2 Le raisonnement et la mise en équation **21**

3 La nature locale de l'équilibre **24**

4 La disparition de la tendance du sous-jacent **25**

Partie 3: Hypothèses sous-jacentes aux extensions du modèle de de Black et Scholes **27**

1 Introduction **27**

2 Chronologie des variations de variance **30**
2.1 Le modèle de Hull, White et celui de Wiggins : 1987 . 30
2.2 Le modèle de Johnson et Shanno : 1987 30
2.3 Le modèle de Scott 1 : 1987 31
2.4 Le modèle de Scott 2 : 1989 32
2.5 Le modèle de Stein et Stein : 1991 32
2.6 Le modèle de Heston : 1993 33

3 Epilogue **35**

Bibliographie: **38**

Table des matières: **43**