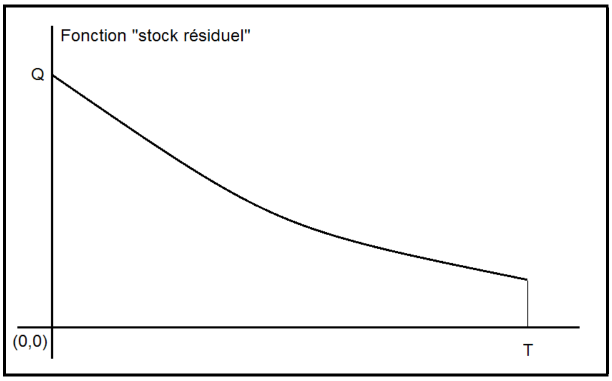
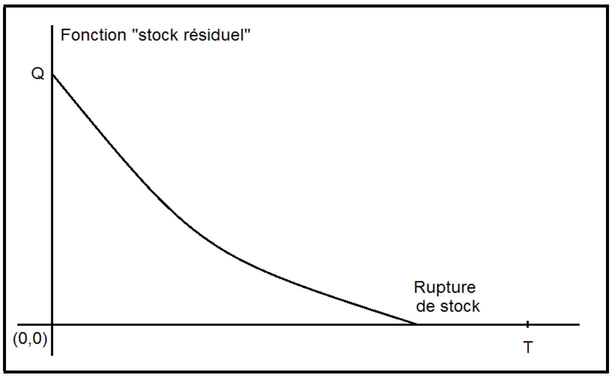
Peut-on gérer de manière optimale la distribution de produits indispensables et non stockables ?
Oui ... si on les vend trop chers !

Daniel Justens

La gestion de stocks est l'un des domaines en économie et en gestion qui a donné naissance depuis cinquante ans à une littérature des plus abondantes, multipliant les modèles. Pour chaque problème concret, il faut donc déterminer dans quel contexte on travaille de manière à traduire le plus correctement possible la réalité du problème à résoudre : il faut opter pour le court terme ou le long terme, choisir entre modèles déterministes ou stochastiques, définir des priorités et des principes de gestion optimale. Nous allons présenter un modèle général simple et l'appliquer dans un domaine délicat, celui de la distribution d'un produit non stockable et indispensable à tous : l'électricité.

Convenons tout d'abord du choix d'un horizon fini T durant lequel nous tenterons d'ajuster la production ou pour lequel nous désirons constituer un stock « idéal ». Le choix de la définition de l'optimalité a une influence significative sur le type de gestion. En univers réel, la demande est une variable aléatoire que nous noterons R, de distribution supposée connue et déterminée par sa fonction de répartition $F(r)$. Il convient de distinguer la variable *demande* de la variable *vente,* la demande pouvant être supérieure à l'offre. La vente peut être vue comme la demande assortie d'une barrière absorbante en 0. Considérons un approvisionnement initial unique d'une quantité déterminée Q d'un certain produit devant satisfaire la demande durant [0, T[. Quel que soit le stock originel Q constitué à l'instant 0, deux situations peuvent se produire durant cet intervalle de temps : la demande peut être inférieure au stock constitué (existence d'un stock résiduel) ou elle peut se révéler supérieure (rupture de stock).





L'écoulement n'est pas nécessairement linéaire : pourquoi la demande par unité de temps serait-elle constante? On admet généralement que pour le très court terme, le type d'écoulement n'a pas d'incidence sur l'optimalité du système de gestion. Cette affirmation constitue en fait la définition du court terme. On peut alors se contenter d'une modélisation basée uniquement sur la situation initiale et la situation finale de la fonction « stock résiduel ». Pour un certain produit, notons c le coût de production unitaire, s le prix de vente unitaire, v la valeur unitaire résiduelle à l'instant T des éléments du solde (invendus), p la perte unitaire en cas de demande supérieure à l'offre et a les coûts fixes de production. Ces derniers n'influencent pas le système de gestion : la décision n'est pas au niveau de la variable « produire ou non » mais se situe au niveau marginal : « produire plus moins ». On doit avoir $s > c > v$. Dans le cas contraire, une production exorbitante, ne correspondant en rien aux besoins du marché, serait modélisée comme une accroissement de richesse.

Il faut déterminer le principe d'optimalité sur lequel va reposer la gestion du produit. Ce dernier relève du choix du décideur. Il peut opter pour une gestion prudente, minimisant le risque de perte, ou préférer une gestion plus agressive dans le but de maximiser le profit. Il peut également se fixer un niveau de risque de rupture de stock à ne pas dépasser de façon à ne pas mécontenter le client (situation de monopole par exemple).

Considérons une distribution de demande sur [0, *T*[de fonction densité de probabilité *f(r)* qui devrait être identiquement nulle pour toute valeur négative de *r*, mais on constate que les gestionnaires travaillent couramment avec une fonction de demande normale, définie pour tout *r* réel. Il convient alors de conforter la pertinence de l'hypothèse de normalité en vérifiant que la probabilité associée à l'ensemble des valeurs négatives n'est pas significativement différente de zéro. Lorsque ce n'est pas le cas, on peut travailler avec une distribution uniforme, avec une distribution exponentielle négative, ou encore avec une distribution de type Erlang. Deux cas se présentent donc. Lorsque la demande est inférieure à l'offre ($r<Q$), le gestionnaire se retrouve à l'instant *T* face à un stock résiduel ($Q - r$) qu'il ne peut plus négocier dans les mêmes conditions. C'est le cas pour des denrées périssables, mais également aussi pour tous les articles de mode. Il en résulte avec nos conventions et notations une perte unitaire $C_1 = c-v$. Lorsque la demande est supérieure à l'offre ($r>Q$), le gestionnaire peut rater des ventes (coût d'opportunité) ou être contraint de faire appel à la sous-traitance. Il en résulte un coût unitaire marginal quantifiable $C_2 = p$.

Principe du minimum d'espérance de coût

Convenons de travailler de manière prudente, en minimisant l'espérance de coût total. Cette dernière est conditionnelle, dépendant explicitement de la quantité *Q* à produire ou commander sur [0, *T*[:

$$E[C(Q)]=\int_0^Q C_1(Q-r)f(r)dr+\int_Q^\infty C_2(r-Q)f(r)dr+a$$

Cette présentation permet l'introduction illustrée de la notion d'espérance mathématique comme somme des coûts pondérée par les probabilités associées aux demandes correspondantes. On voit apparaître naturellement la nécessité d'une généralisation de la notion de moyenne, la variable nous intéressant (le coût) étant une *fonction* de la variable aléatoire du problème (la demande). Procédons classiquement à la recherche du minimum. La dérivation à prévoir est une application et cas particulier de la formule de Leibniz :

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x) \quad et \quad \frac{d}{dx}\int_x^a f(t)dt=-f(x)$$

On arrive explicitement à :

$$\frac{d}{dQ}E[C(Q)]=C_1\int_0^Q f(r)dr+C_1Qf(Q)-C_1Qf(Q)-C_2Qf(Q)+C_2Qf(Q)-C_2\int_Q^\infty f(r)dr=0$$

$$C_1\int_0^Q f(r)dr-C_2\int_Q^\infty f(r)dr=0$$

On vérifie la positivité de la dérivée seconde et l'on constate que les deux intégrales présentes dans l'expression peuvent s'exprimer au moyen de la fonction de répartition F(x) de la variable demande.

$$\int_0^Q f(r)dr=F(Q) \quad et \quad \int_Q^\infty f(r)dr=1-F(Q)$$

On obtient finalement :

$$F(Q)=\frac{C_2}{C_1+C_2}=\frac{p}{c-v+p}$$

La solution à notre problème n'est pas explicite : elle passe par le canal de la fonction de répartition de la variable demande. Ceci est un gage de réalisme et était intuitivement prévisible. La solution n'est donc pas une quantité à produire mais une probabilité de production (ou d'approvisionnement) suffisante pour faire face à la demande. La fonction de répartition de cette demande, *F(Q)* représente la probabilité, optimale selon le critère du minimum de coût, avec laquelle la demande doit être inférieure à la production, permettant ainsi de satisfaire tous les clients. Pour déterminer une quantité optimale à produire, il faut donc avoir une bonne idée de la répartition des ventes. Cette répartition peut changer d'un jour à l'autre de la semaine (journaux) ou d'une heure à l'autre dans la journée (hamburgers en restauration rapide). La probabilité complémentaire

$$1-F(Q)=\frac{c-v}{c-v+p}$$

représente la probabilité de rupture de stock en cas d'approvisionnement idéal. L'optimalité du système d'approvisionnement peut être testée. On tombe alors sur une application réaliste du théorème de Moivre-Laplace.

Chaque approvisionnement représente une expérience aléatoire à deux issues possibles : stock résiduel ou rupture de stock. La répétition des approvisionnements dans des conditions comparables illustre un schéma de Bernoulli réaliste et l'on peut aisément vérifier l'optimalité du système d'approvisionnement ou de production. Le court terme du modèle conduit rapidement à un nombre suffisant d'expériences autorisant raisonnablement l'utilisation des lois faibles des grands nombres.

Principe du maximum d'espérance de profit

Reprenons le même problème et optons à présent pour une politique plus agressive. Supposons que le gestionnaire désire maximiser son espérance de profit. Nous utilisons les mêmes notations que plus haut. L'espérance de profit vaut :

$$E[P(Q)]=\int_0^Q [(s-v)r+vQ]\, f(r)\,dr+\int_Q^\infty [(s+p)Q-pr]\, f(r)\,dr-a-cQ$$

En cas de stock trop important ($r<Q$), le flux financier engrangé est donné par la différence entre les rentrées consécutives aux ventes ajoutée à la valeur résiduelle du stock à terme, et le coût total de production (variable + fixe) : $P[Q|r] = sr + v(Q-r) - a - cQ$. En cas de rupture de stock, on trouve $P[Q|r] = sQ - p(r-Q) - a - cQ$ selon le même raisonnement. Il convient en effet d'acter le coût d'opportunité pour toutes les ventes ratées pour cause de stock insuffisant. On utilise une nouvelle fois la formule de Leibniz pour arriver à la solution implicite :

$$F(Q)=\frac{s+p-c}{s+p-v}$$

On vérifie que cette dernière probabilité de stock suffisant est toujours supérieure à la précédente, sous nos hypothèses économiquement raisonnables ($s > c > v$). Une définition plus agressive de l'optimalité conduit à un excédant de production.

Que se passe-t-il en ce qui concerne l'approvisionnement et la distribution en électricité ?

Le cas particulier de la production et de la distribution d'électricité conduit à une présentation notablement simplifiée et peut se faire dans un premier temps dans un cadre plus général. : celui des denrées périssables, c'est-à-dire de valeur résiduelle v identiquement nulle. Envisageons la production ou de l'approvisionnement d'un bien fourni au prix unitaire c et vendu au prix unitaire $s = (M+1).c$. Le paramètre M représente la marge bénéficiaire en dehors, calculée sur le prix à la production (M est définie sur l'ensemble des réels strictement positifs). Cette dernière ne représente pas une mesure du bénéfice unitaire réalisé, les frais fixes n'étant pas pris en compte et le problème traité se situant au niveau d'une production marginale complémentaire. Les produits périssables sont tous les produits de valeur résiduelle nulle ($v = 0$), ce qui est le cas de l'électricité mais également des primeurs au marché, des fleurs, des journaux et la liste est loin d'être exhaustive. Pour ces produits à durée de vie courte et pour lesquels les besoins sont immédiats, il n'y a pas de possibilité de réapprovisionnement. On peut donc avancer que $p=M.c$. Sous le principe du minimum de l'espérance de coût, la fonction de répartition de la demande correspond à l'optimum lorsque

$$F(Q)=\frac{p}{c-v+p}=\frac{Mc}{c-0+Mc}=\frac{M}{M+1}$$

On peut étudier cette fonction de la marge bénéficiaire M et constater qu'elle est strictement croissante sur l'ensemble des réels positifs, et de concavité vers le bas. Son image est bien conforme à celle d'une fonction de répartition : [0, 1[. Cette fonction représente la probabilité avec laquelle on doit satisfaire la demande en cas de gestion optimale frileuse, exprimée en fonction de la marge bénéficiaire choisie. Ces propriétés sont interprétables : une marge plus élevée correspond toujours à un taux de rupture plus bas (intuitivement évident) et situe le gestionnaire dans un contexte plus stable. On vérifie également le comportement asymptotique :

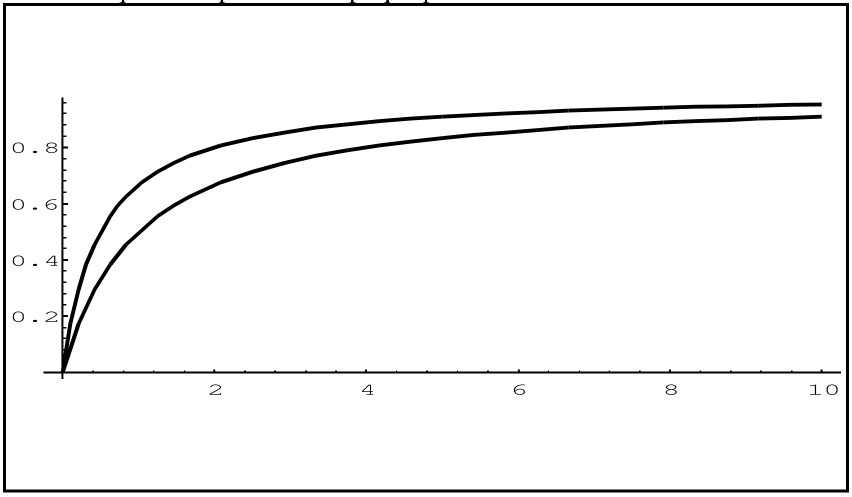
$$\lim_{M\to+\infty} F(Q)=1$$

qui signifie que pour des marges bénéficiaires élevées, on tendra à satisfaire la demande avec probabilité 1. Pour de fortes marges, la probabilité idéale de rupture de stock est proche de zéro. On se rend compte que dans le cas de l'électricité, l'éventualité d'une demande supérieure à l'offre doit être évitée à tout prix pour des raisons de sécurité. La marge doit donc être très élevée. On comprend pourquoi l'électricité est fournie à un prix consommateur approximativement égal à dix fois le prix de production !

Dans le cas du maximum de l'espérance de profit, les choses sont à peine différentes. On calcule :

$$F(Q)=\frac{s+p-c}{s+p-v}=\frac{(M+1)c+Mc-c}{(M+1)c+Mc-0}=\frac{2\mathrm{M}}{2\mathrm{M}+1}$$

Cette fonction peut être étudiée et comparée à celle qui correspondait à l'optique précédente.



La courbe supérieure correspond à la gestion la plus agressive. On constate que la gestion optimale en cas de politique prudente est significativement différente de la gestion plus agressive pour des marges bénéficiaires plutôt maigres. Le maximum d'écart s'obtient pour la valeur

$$M=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Les produits de luxe permettant une vente avec marge élevée concilient donc deux objectifs apparemment contradictoires. Dans le cas de l'électricité pour laquelle M est approximativement égal à 10, les fréquences optimales de stock suffisant sont assez proches : 10/11=0,91 et 20/21=0,95. Les fréquences réalistes de stock suffisant doivent quant à elles tendre vers 0,9999......