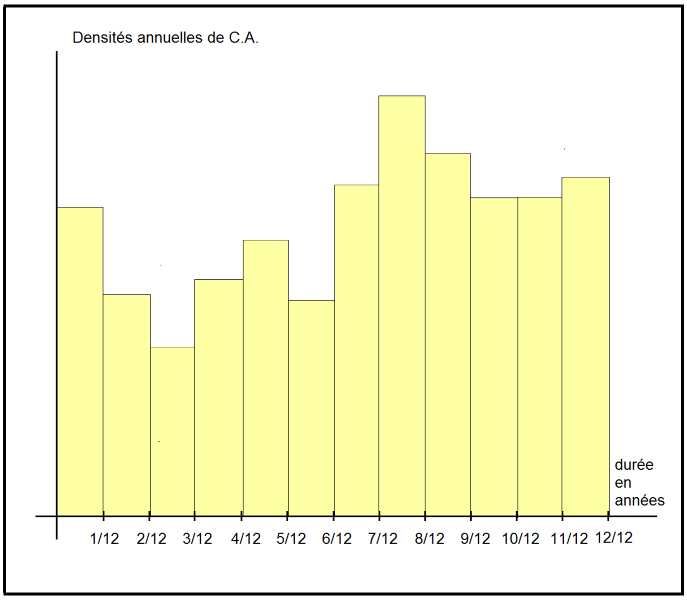
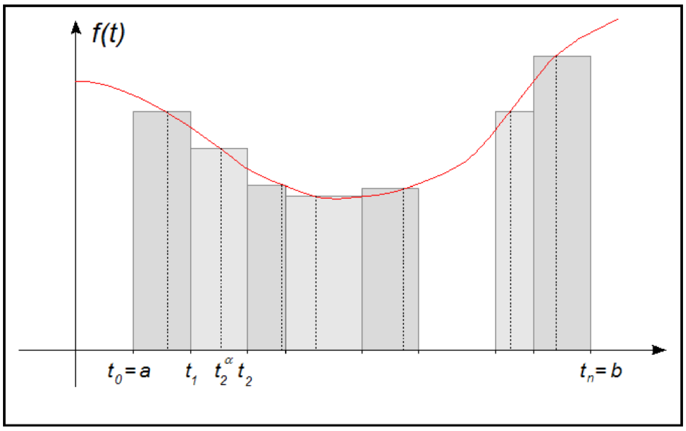
Le passage difficile de l'intégrale de Riemann à l'intégrale stochastique

Daniel Justens

L'une des façons les plus simples d'introduire l'intégrale d'une fonction se fait par le moyen du calcul de la mesure de l'aire de la surface (au signe près) comprise entre deux valeurs de la variable (a et b), la fonction et l'axe de la variable. Ce calcul fait apparaître explicitement le processus de sommation qui intervient dans la procédure et également la nécessité d'un passage à la limite. À titre d'exemple concret, considérons la variable « chiffre d'affaire C.A. d'une entreprise ». Le C.A. total est évidemment la somme des C.A. correspondant à des périodes intermédiaires : le C.A. de la dernière année est la somme des 12 C.A. mensuels de cette année, ou encore la somme des 300 C.A. journaliers (jours ouvrables) de cette année. Ces chiffres d'affaires sont variables d'un jour à l'autre, d'un mois à l'autre. Comment représenter mathématiquement ces objets ? L'idée est de considérer non pas **le** chiffre d'affaire mais bien sa *densité*, c'est-à-dire sa valeur correspondante sur une durée d'un an. Lorsque l'on travaille par mois, on obtient la densité annuelle en multipliant par 12. En travaillant par jour ouvrable, on multiplie le C.A. journalier par environ 300. Sous cette convention, le calcul du C.A. total devient l'intégrale de la fonction « densité de flux financier ». Cette intégrale est représentée par la surface en jaune sur le graphique ci-contre et représente le chiffre annuel de l'entreprise. On constate que le calcul des surfaces des rectangles fait apparaître des facteurs (1/12) qui justifient la multiplication par 12 des C.A. observés mensuellement. Cette façon de procéder n'est pas triviale : elle ouvre la porte à une représentation concrète sophistiquée des plus intéressantes.



Lorsque la variable est le temps, on la note t. Nous utilisons cette notation systématiquement dans la suite. On a constaté que la fonction construite dans le cadre de notre exemple était *naturellement* en escaliers. Pour intégrer une fonction mathématique usuelle $f(t)$, il faut provoquer l'apparition d'une fonction de ce type. On le fait en introduisant une subdivision de l'intervalle de définition de la variable. Dans chaque intervalle ainsi déterminé, on choisit une valeur arbitraire et on considère la fonction comme constante dans cet intervalle en lui attribuant cette valeur particulière. Formellement, si l'intervalle sur lequel on veut calculer l'intégrale est noté $[a,b[$, on introduit $(n+1)$ points de subdivisions $t_0=a < t_1 < \ldots < t_i < \ldots < t_n=b$. Dans chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}[$, on choisit un point intermédiaire t_i^α. On approche alors la fonction $f(t)$ par la fonction en escalier $f_n(t)$, en lui donnant la valeur $f(t_i^\alpha)$ pour tout point de l'intervalle $[t_i, t_{i+1}[$. On intègre la fonction approchée selon :



$$\int_a^b f_n(t)\,dt = \sum_{i=1}^n f\left(t_i^\alpha\right)\left(t_i - t_{i-1}\right)$$

En choisissant de plus en plus de points de subdivisions dans $[a,b[$ et en veillant à faire tendre les longueurs des intervalles $[t_{i-1}, t_i[$ vers 0, on approche progressivement la mesure de la surface. À la limite, la valeur trouvée est « exacte » sous certaines conditions.

Le glissement vers un monde aléatoire

Revenons à notre exemple des chiffres d'affaires. Lorsque l'on se tourne vers le passé, les chiffres d'affaires sont connus. Ce n'est plus le cas lorsque l'on veut proposer une présentation axée vers le futur. On a dans ce cas sans doute une *idée* des C.A. mais on ne les connait pas totalement. On postule alors l'existence d'une variable aléatoire quantifiant l'incertitude sur les activités économiques futures. Peut-on arriver à une représentation du C.A. total au moyen d'une expression du type :

$$C.A.\,Total=\int_a^b f(t)\,dt+\int_a^b u(t,\omega)\,dt=\sum_{i=1}^n f(t_i^\alpha)(t_i-t_{i-1})+\sum_{i=1}^n u(t_i^\alpha,\omega)(t_i-t_{i-1})$$

dans laquelle comme plus haut la fonction f représente l'espérance de densité de C.A. et la variable aléatoire u quantifie l'incertitude sur cette densité de chiffre d'affaire ? La réponse à cette question est négative. Voyons pourquoi. Il faut émettre une série d'hypothèses concernant la fonction u, afin de rendre la représentation « économiquement réaliste ». On suppose tout d'abord que la variable $u(t, \omega)$ est indépendante de la variable $u(s, \omega)$ pour tout $t<s$. La justification économique de cette hypothèse repose sur le fait que l'on ne peut anticiper des mouvements imprévisibles à un moment en connaissant les variations aléatoires passées. On suppose ensuite que l'espérance de cette variable aléatoire est identiquement nulle : $E[u(t, \omega)]=0$ pour tout t. Cette hypothèse équivaut à dire que toute l'information sur l'activité économique de l'entreprise est contenue dans la fonction f. Sous ces conditions, u représente ce que l'on appelle un *bruit blanc*. On suppose enfin que la variance de u est finie pour tout t : il existe un réel K tel que $V[u(t, \omega)] < K$ pour tout t. Il est en effet impossible de gérer un phénomène infiniment variable. Sous ces conditions, on peut montrer que la variance du chiffre d'affaire total est identiquement nulle, ce qui revient à dire que l'on est resté en univers déterministe : il n'y a pas de composante aléatoire dans le modèle !

$$V[C.A.\,Total]=V\left[\int_a^b u(t,\omega)\,dt\right]=0$$

D'où vient le problème ? La démonstration du résultat précédent se fait en majorant la variance par une quantité tendant uniformément vers 0 lorsque le nombre de points de subdivisions de l'intervalle de définition tend vers l'infini. Le calcul explicite de la variance conduit à une expression du type :

$$V[C.A.\,Total]=V\left[\int_a^b u(t,\omega)\,dt\right]\le K\sum_{i=1}^n (t_i-t_{i-1})^2$$

En choisissant n intervalles de longueur identique $(b-a)/n$, le majorant devient :

$$V[C.A.\,Total]\le\frac{K*n*(b-a)^2}{n^2}=\frac{K*(b-a)^2}{n}$$

Le passage à la limite dans le cadre de notre modèle annule complètement sa composante aléatoire. En supposant que la somme contenue dans la deuxième intégrale (l'intégrale aléatoire) était constituée de termes proportionnels aux accroissements de temps, on l'a condamnée à la nullité presque sûre. Ceci est dû à une propriété étonnante :

> *En univers aléatoire, les accroissements sont proportionnels à la racine carrée du temps qui s'écoule et non au temps lui-même.*

Ce résultat n'est pas intuitif mais on peut s'en convaincre en regardant le modèle simplifié suivant. Supposons que tous les intervalles de temps, la variation aléatoire X_i se traduise soit par une petite hausse « *h* » du C.A., soit par une petite baisse « *-h* » et que les probabilités associées à ces deux événements soient identiques (0,5). Le C.A. Total devient :

$$C.A.\,Total = \int_a^b f(t)\,dt + \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Il faut étudier la somme de *n* variables X_i, identiques, indépendantes. Chacune de ces variables a une moyenne nulle :

$$E[\, X_i \,] = 0{,}5 \,.\, h + 0{,}5 \,.\, (-h) = 0.$$

La variance de ces variables « petites variations » est clairement finie :

$$V[\, X_i \,] = 0{,}5 \,.\, h^2 + 0{,}5 \,.\, (-h)^2 = h^2.$$

Passons à présent à la variable C.A. Total et calculons-en moyenne et variance :

$$E[C.A.\,Total] = \int_a^b f(t)\,dt$$

la moyenne d'une somme étant la somme des moyennes. Quant à la variance d'une somme de variables aléatoires indépendantes, elle est égale à la somme des variances des termes de la somme :

$$V[C.A.\,Total] = \sum_{i=1}^{n} V[X_i] = n h^2$$

Dans cette expression, *n* représente toujours le nombre de « mini-intervalles » de temps constituant notre horizon. Supposons que chaque intervalle de temps (identique) se note τ. On sait alors que l'horizon considéré (*b-a*) est égal à *n τ*. Et donc que *n* = (*b-a*)/*τ*. Notre variance peut alors s'écrire :

$$V[C.A.\,Total] = \frac{(b-a)h^2}{\tau}$$

Une mesure objective des variations aléatoire en est l'écart-type. Notre calcul montre que celui-ci est proportionnel à la racine carrée de l'horizon considéré (*b-a*) :

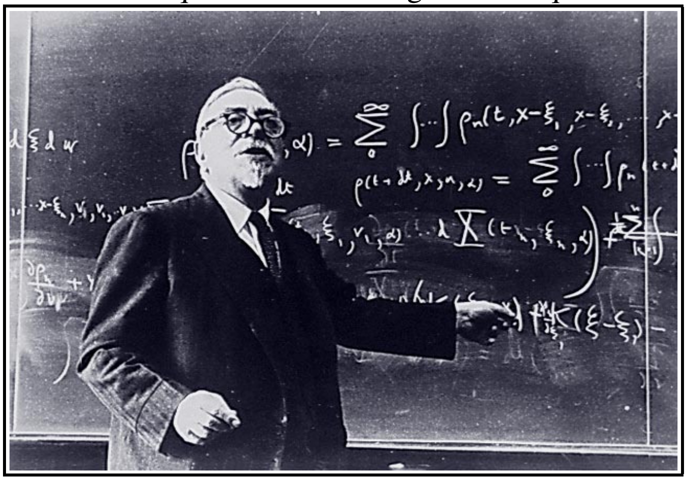
$$\sigma[C.A.\,Total] = \sqrt{\frac{(b-a)h^2}{\tau}} = \sqrt{b-a}\,\frac{h}{\sqrt{\tau}}$$

La solution au problème : l'intégrale stochastique de Itô

Il convient donc de remplacer le temps, intervenant directement dans la construction des intégrales de Riemann, par un processus de comptage aléatoire jouissant de toutes les propriétés souhaitées pour être utilisable en pratique. En quelque sorte, on va construire une intégrale de Stieltjes très particulière. C'est le rôle que va jouer la formalisation du *mouvement brownien*. On se souvient du botaniste irlandais Robert Brown (1773 – 1858), qui s'était signalé en publiant en 1828 son observation des mouvements erratiques du pollen de *Clarkia pulchella* dont les particules semblaient se mouvoir aléatoirement dans tous les sens. Ce type de mouvement est aujourd'hui modélisé par un processus dit *stochastique*, c'est-à-dire un

phénomène évoluant aléatoirement au cours du temps. On donne à ce processus les propriétés « économiquement raisonnables » qui ont été avancées plus haut : espérance finie, et accroissements indépendants et stationnaires. C'est toujours l'idée qu'il ne nous est pas possible d'appréhender les variations aléatoires futures à partir des observations passées de ces mêmes variations aléatoires qui prévaut. On suppose aussi que les effets aléatoires ne se manifestent pas instantanément. On donne enfin à ce processus une distribution normale, ce qui permet des sommations sans problème : la distribution normale étant la seule distribution de variance finie stable par sommation.

Sous ces conditions, on peut montrer que la variance d'un tel processus est toujours proportionnelle au temps. Et donc que son écart-type, une mesure plus ou moins objective de ses variations, est proportionnel à la racine carrée du temps écoulé. On uniformise enfin le processus en introduisant le *Mouvement Brownien Standard* (MBS) pour lequel la variance est rigoureusement égale au temps. Il existe plusieurs notations dans la littérature pour désigner le MBS, qui peut s'écrire $B(t,\omega)$, $z(t,\omega)$ ou encore $w(t,\omega)$. Nous choisissons cette dernière notation qui est un hommage à celui qui fut l'un des premiers à en donner une représentation moderne, le mathématicien américain, père de la cybernétique, Norbert Wiener (1894 – 1964). On peut donc en gros voir le processus standardisé comme une distribution normale donnant à tout moment l'intensité cumulée de variation aléatoire imprévisible sous la forme d'une distribution normale d'espérance nulle et d'écart-type égal à la racine carrée du temps écoulé depuis le début de l'observation du phénomène. Ce type d'objet mathématique porte le nom de *bruit blanc* (sans tendance).



Le fait d'avoir standardisé notre processus stochastique nous permet d'introduire la notion de *volatilité* de la variation aléatoire, sous la forme d'un coefficient $\sigma(t)$ proportionnel au MBS, qui quantifie exactement l'ampleur de cette variation. C'est cette volatilité dont on parle quotidiennement en finance et dont peu d'acteurs sont capables de donner une définition correcte ...

Nous voici à présent à même de proposer une première définition de notre chiffre d'affaire total défini d'une part par une intégrale ordinaire et d'autre part au moyen d'une intégrale stochastique. La première intégrale quantifie notre information sous forme d'une espérance, la deuxième est une variable aléatoire exprimant le niveau de variabilité que l'on peut attendre.

$$\begin{aligned} C.A.\,Total &= \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b \sigma(t)\,dw(t,\omega) \\ &= \sum_{i=1}^n f(t_i^\alpha)(t_i - t_{i-1}) + \sum_{i=1}^n \sigma(t_i^\alpha)\left[w(t_i,\omega) - w(t_{i-1},\omega)\right] \end{aligned}$$

On constate ici, formellement, une certaine parenté avec l'intégrale de Stieltjes. Mais le rôle de la fonction de comptage « *g* » apparaissant dans l'intégrale de Stieltjes est ici joué par une variable aléatoire, ce qui modifie significativement la nature de l'intégrale définie. L'expression que nous venons d'introduire n'est malheureusement pas encore réaliste. En effet, les variations aléatoires ne sont perçues et mesurables que tous les intervalle de temps. Il n'est pas raisonnable de supposer que l'observateur soit au fait des variations d'amplitude de la variation aléatoire entre deux instants d'observation. C'est le phénomène de *non-anticipativité*. Il convient donc, dans notre intégrale stochastique, de ne considérer pour la volatilité que l'information dont on dispose, c'est-à-dire la valeur de cette volatilité au début de chaque intervalle. Les points intermédiaires t_i^α sont donc remplacés par les instants « débuts » de chaque intervalle de temps, à savoir t_{i-1}. Nous en voici enfin arrivé à une expression presque définitive de l'intégrale stochastique :

$$\int_a^b f(t)\,dt+\int_a^b \sigma(t)\,dw(t,\omega)=\sum_{i=1}^n f(t_i^\alpha)(t_i-t_{i-1})+\sum_{i=1}^n \sigma(t_{i-1})\left[w(t_i,\omega)-w(t_{i-1},\omega)\right]$$

Que nous manque-t-il encore ? Le fameux passage à la limite pour un nombre d'instants intermédiaires tendant vers l'infini, la durée des mini-intervalles entre deux observations successives tendant également vers 0. Nous voici enfin en présence de l'intégrale stochastique issue des travaux du grand mathématicien japonais Kiyoshi Itō (1915 - 2008), l'un des pionniers du calcul stochastique moderne.

Certes la construction de l'intégrale est laborieuse. Elle est le résultat de décennies de recherches dans lesquelles se sont impliquées des personnalités du monde scientifique aussi médiatiques qu'Einstein en personne. Mais le résultat est à la mesure de l'effort. Nous disposons à présent d'un outil de représentation efficace et utile. Les conséquences en sont surtout visibles en finance, un domaine dans lequel la modélisation que nous venons de présenter a permis la valorisation objective de produits de plus en plus complexes, à commencer par les options : droit d'acheter ou de vendre un actif donné à un moment donné à un prix donné. Ces dernières ont permis au marché de multiplier les produits dépendant de sources de risque identiques, ce qui autorise une gestion responsable minimisant les risques. On s'attendrait donc à observer une certaine moralisation du secteur financier qui pourrait gérer ses actifs de manière responsable. Mais ces produits présentent également de forts effets de levier, permettant la réalisation à très court terme d'énormes bénéfices, ou de pertes gigantesques. Cette propriété en fait la cible des spéculateurs qui ne se privent pas d'abuser de ces opportunités, sans toujours prendre conscience des risques courus. C'est qu'une utilisation optimale des modèles, nécessite une maîtrise totale des concepts et des fondements de la théorie. Les dérapages récents observés dans le monde de la finance montrent à quel point cette maîtrise fait défaut à un grand nombre d'acteurs économiques.