L'INTÉGRALE DE LEBESGUE EN L1

par

Adrien Lebègue et Laurent Moonens

Encore aujourd'hui, l'intégrale de Lebesgue (1875-1941) souffre d'une présentation tardive (son étude est bien souvent partie constituante d'un cours de théorie de la mesure en L2 ou L3).

L'intégrale de Riemann (1826-1866) occupe donc bien souvent les étudiants des premières années universitaires. Un avantage certain de cette dernière intégrale est sa simplicité d'introduction (la référence aux sommes de Riemann lui confèrant un grand caractère intuitif).

Revers de la médaille, les énoncés des théorèmes de convergence et la référence obligatoire aux intégrales impropres confèrent à cette théorie un caractère artificiel parfois peu élégant. En outre, même la fonction de Dirichlet (1805-1859) d définie par $d(x) = 1$ si x est rationnel et $d(x) = 0$ sinon — nulle hors d'un ensemble dénombrable de points — n'est pas intégrable au sens de Riemann sur $[0, 1]$ puisqu'elle n'est continue en aucun point de $[0, 1]$.

Il semble pourtant, à lire la plupart des textes de cours en France, qu'il soit inévitable de choisir entre l'efficacité remarquable, nécessairement technique, de l'intégrale de Lebesgue et la simplicité louable mais peu efficace de l'intégrale de Riemann.

Laurent Moonens est *aspirant* du Fonds de la Recherche scientifique — FNRS (Belgique).

Nous proposons ici une alternative à cet apparent dilemme, en exposant une présentation simple — due à McShane (1904-1989), voir **[6]** — de l'intégrale de Lebesgue sur un intervalle, et qui repose sur une modification *formellement simple* mais *conceptuellement profonde* de la définition de Riemann.

Le point clé de la définition de McShane est la considération de *divisions au pas non-uniforme*, plus fines aux voisinnages des points singuliers de la fonction que l'on cherche à intégrer.

Nous formalisons cette notion de division au pas non-uniforme dans la section 1, et par le biais du lemme de Cousin (1867-1933), nous montrons qu'il existe toujours une division subordonnée à un pas non-uniforme fixé à l'avance. Dans la section 2, nous présentons la définition de McShane de l'intégrale de Lebesgue et énonçons brièvement quelques-unes de ses propriétés. Nous nous attelons ensuite, dans la section 3, à énoncer un *théorème fondamental* qui assure l'intégrabilité au sens de Lebesgue de toutes les *dérivées fortes*. Dans la section 4, nous établissons le célèbre *théorème de convergence monotone* sans sortir du cadre de la définition de McShane.

Nous souhaitons remercier les rapporteurs de Quadrature pour leur lecture attentive ainsi que leurs excellentes suggestions.

1. Lemme de Cousin

Commençons notre route vers la *Lebesgue-intégrabilité* en formalisant la notion de division subordonnée à une application postitive.

Introduisons pour ce faire la notion importante de P-division (lire division *Pointée*) librement ancrée d'un intervalle $[a, b]$.

Définition 1. — Une *P-division librement ancrée dans* $[a, b]$ est une famille finie

$$\mathcal{D} = \{(x^1, [a^1, b^1]), (x^2, [a^2, b^2]), \ldots, (x^m, [a^m, b^m])\} = \{(x^j, [a^j, b^j])\}_{1 \leqslant j \leqslant m}$$

où

1. $x^j \in [a, b]$ pour chaque $1 \leqslant j \leqslant m$ (x^j est le *point d'ancrage* associé à $[a^j, b^j]$) ;

2. pour tous $1 \leqslant j \neq k \leqslant m$, $[a^j, b^j]$ et $[a^k, b^k]$ sont soit disjoints, soit contigus.

La P-division $\mathcal{P} = \{(x^j, [a^j, b^j])\}_{1 \leqslant j \leqslant m}$ librement ancrée dans $[a, b]$ est appelée *P-partition* librement ancrée dans $[a, b]$ si la condition suivante est satisfaite :

3. $[a, b] = [a^1, b^1] \cup [a^2, b^2] \cup \cdots \cup [a^m, b^m] = \bigcup_{j=1}^{m} [a^j, b^j]$.

Remarque 2. — On notera qu'on *ne* demande *pas* au point d'ancrage x^j d'appartenir à l'intervalle correspondant $[a^j, b^j]$.

Voyons comment caractériser la *finesse* d'une P-division relativement à une application positive donnée.

Définition 3. — Soit $\delta : [a, b] \to]0, \infty[$ une application positive et $\mathcal{D} = \{(x^j, [a^j, b^j])\}_{1 \leqslant j \leqslant m}$ une P-division librement ancrée dans $[a, b]$. On dit que $\mathcal{P}$ est δ-fine si :

4. pour chaque $1 \leqslant j \leqslant m$, on a $[a^j, b^j] \subseteq [x^j - \delta(x^j), x^j + \delta(x^j)]$.

Remarque 4. — La condition (4) implique en particulier que le point d'ancrage x^j est situé à une distance au plus $\delta(x^j)$ de l'intervalle $[a^j, b^j]$.

Exemple 5. — Définissons $\delta : [0, 10] \to]0, \infty[$ par $\delta(x) = x + 1$. La famille

$$\mathcal{P}' = \{(5, [0, 4]), (4, [4, 10])\}$$

est une P-partition librement ancrée dans $[0, 10]$. Cependant, $\mathcal{P}'$ n'est pas δ-fine. En effet, $[4, 10]$ n'est pas inclus dans l'intervalle

$$[4 - \delta(4), 4 + \delta(4)] = [4 - (4 + 1), 4 + (4 + 1)] = [-1, 9].$$

En choisissant 8 comme point d'ancrage au lieu de 4 dans $\mathcal{P}'$, nous obtenons une P-partition $\mathcal{P}''$ librement ancrée dans $[0, 10]$, qui est cette fois δ-fine puisque $[0, 4] \subseteq [-1, 11]$ et $[4, 10] \subseteq [-1, 17]$.

Notons que rien ne nous dit *a priori*, qu'étant donné une application positive δ quelconque sur un intervalle $[a, b]$, il *existe* une P-partition librement ancrée dans $[a, b]$ qui soit δ-fine. Le *lemme de Cousin* nous en assure.

***Lemme 6* (Cousin).** — *Pour toute application positive $\delta : [a,b] \to]0,\infty[$, il existe une P-partition δ-fine librement ancrée dans $[a,b]$.*

Démonstration. — Appelons E l'ensemble des $x \in [a,b]$ pour lesquels l'intervalle $[a,x]$ admet une P-partition δ-fine librement ancrée dans $[a,x]$. Nous souhaitons montrer que $b \in E$.

Pour ce faire, remarquons d'abord que E est non vide, puisque la famille $\{(a,[a,a+\delta(a)]\}$ est une P-partition δ-fine librement ancrée dans $[a,a+\delta(a)]$.

Notons $c = \sup E$ et observons que $c \in E$. En effet, si $a \geqslant c - \delta(x)$, alors $\{(c,[a,c]\}$ est une P-partition δ-fine librement ancrée dans $[a,c]$, et il vient $c \in E$. Si au contraire $a < c - \delta(c)$, alors par définition de c, l'intervalle $[a,c-\delta(c)]$ admet une P-partition δ-fine $\mathcal{P}$ librement ancrée dans $[a,c-\delta(c)]$. Par conséquent, la famille $\mathcal{P}' = \mathcal{P} \cup \{(c,[c-\delta(c),c])\}$ est une P-partition δ-fine librement ancrée dans $[a,c]$, et on trouve $c \in E$. En résumé, nous avons $c = \max E$.

Voyons a présent que $c = b$. Pour ce faire, supposons qu'au contraire, on ait $c < b$. Choisissons alors $\mathcal{P}$ une P-partition δ-fine librement ancrée dans $[a,c]$. La famille $\mathcal{P} \cup \{(c,[c,c+\delta(c)])\}$ est alors une P-partition δ-fine librement ancrée dans $[a,c+\delta(c)]$. Il vient donc $c+\delta(c) \in E$, ce qui contredit la maximalité de c et achève la démonstration. □

Nous sommes à présent en mesure d'introduire notre définition d'intégrabilité.

2. La définition de McShane de l'intégrale de Lebesgue

Fixons une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et une P-partition

$$\mathcal{P} = \{(x^j,[a^j,b^j])\}_{1 \leqslant j \leqslant m}$$

librement ancrée dans $[a,b]$. La *somme de Riemann* associée à f et $\mathcal{P}$ est le réel $S(f,\mathcal{P})$ défini par

$$S(f,\mathcal{P}) := \sum_{j=1}^{m} f(x^j)(b^j - a^j);$$

qui représente la somme des produits des longueurs des intervalles constituant $\mathcal{P}$ avec l'image par f du point d'ancrage correspondant. Dans le cas où f est une fonction positive, remarquons qu'il s'agit de la somme des aires des rectangles (de base $[a^j, b^j]$ et de hauteur $f(x^j)$) engendrés par $\mathcal{P}$ et f.

On s'attend naturellement à ce que la valeur de la somme de Riemann associée à une P-partition librement ancrée dans $[a, b]$ approche d'autant mieux la valeur de l'aire sous le graphe d'une fonction positive f que cette partition est fine ; on notera aussi que plus une P-partition $\mathcal{P} = \{(x^j, [a^j, b^j])\}_{1 \leqslant j \leqslant m}$ librement ancrée dans $[a, b]$ est *fine*, plus les points d'ancrage $x^1, x^2, \ldots, x^m$ sont *proches* des intervalles correspondants — rappelons que si $\mathcal{P}$ est δ-fine, alors la distance entre $[a^j, b^j]$ et x^j est au plus égale à $\delta(x^j)$ pour chaque $1 \leqslant j \leqslant m$.

Nous allons appeler *intégrale* de f entre a et b la limite (lorsqu'elle existe, en un sens à préciser) des sommes de Riemann $\sum_{j=1}^{m} f(x^j)(b^j - a^j)$ calculées pour des P-partitions $\{(x^j, [a^j, b^j])\}_{1 \leqslant j \leqslant m}$ de plus en plus fines.

Nous exprimons cela dans la définition suivante.

Définition 7. — Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est *Lebesgue-intégrable* sur $[a, b]$ s'il existe $I \in \mathbb{R}$ vérifiant la propriété suivante : pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe une application positive $\delta : [a, b] \to]0, \infty[$ telle que, pour toute P-partition δ-fine $\mathcal{P} = \{(x_j, [a_j, b_j]\}_{1 \leqslant j \leqslant m}$ librement ancrée dans $[a, b]$, on ait

$$\left| I - \sum_{j=1}^{m} f(x^j)(b^j - a^j) \right| \leqslant \varepsilon;$$

auquel cas le nombre I vérifiant la propriété précédente est unique, appelé l'*intégrale* de f sur $[a, b]$ et noté $\int_a^b f$ ou encore $\int_a^b f(x)dx$.

Illustrons immédiatement la définition précédente en montrant que la fonction de Dirichlet mentionnée dans l'introduction, est Lebesgue-intégrable sur $[0, 1]$.

Exemple 8. — Définissons $d : [0, 1] \to \mathbb{R}$ par $d(x) = 1$ si x est rationnel et $d(x) = 0$ sinon. Fixons $\varepsilon > 0$ et choisissons une numérotation (q_k) des rationnels. Définissons $\delta : [0,1] \to]0,\infty[$ par la formule

$$\delta(x) = \begin{cases} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} & \text{si } x = q_k, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Choisissons alors $\{(x^j, [a^j, b^j])\}_{1 \leqslant j \leqslant m}$ une P-partition δ-fine librement ancrée dans $[0,1]$; en particulier nous avons $b^j - a^j \leqslant 2\delta(x^j)$ pour chaque $1 \leqslant j \leqslant m$. Observons encore que

$$0 \leqslant \sum_{j=1}^{m} d(x^j)(b^j - a^j) \leqslant \sum_{\substack{j=1 \\ x^j \in \mathbb{Q}}}^{m} 2\delta(x^j) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\substack{j=1 \\ x^j = q_k}}^{m} 2\delta(q_k) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon,$$

en utilisant la convergence de la série géométrique. Ainsi, d vérifie bien la définition de Lebesgue-intégrabilité sur $[0,1]$ avec $\int_0^1 d(x)\,dx = 0$.

On montre, à partir de la Définition 7, les propriétés élémentaires de l'intégrale de Lebesgue. Si f et g sont Lebesgue-intégrables sur $[a,b]$ et si c est un nombre réel, on vérifie que $\int_a^b (f + cg) = \int_a^b f + c\int_a^b g$ (linéarité). Si en outre on a $f(x) \leqslant g(x)$ pour chaque $x \in [a,b]$, alors $\int_a^b f \leqslant \int_a^b g$ (positivité). On démontre également la propriété d'additivité (ou relation de Chasles) : si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est Lebesgue-intégrable sur $[a,c]$ et $[c,b]$, alors f est Lebesgue-intégrable sur $[a,b]$ et $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$. Enfin, on montre que si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est Lebesgue-intégrable sur $[a,b]$, alors $|f|$ est Lebesgue-intégrable sur $[a,b]$; c'est le caractère *absolu* de l'intégrale de Lebesgue.

3. Un théorème fondamental

La définition de l'intégrale de Lebesgue que nous avons faite plus haut suggère l'utilisation d'une notion de dérivée plus forte que la dérivée ordinaire.

Définition 9. — La fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est dite *fortement dérivable* au point $c \in [a,b]$ s'il existe un nombre réel L tel qu'à chaque $\varepsilon > 0$ on puisse associer $\delta > 0$ de telle sorte que pour tous $x, y \in [a,b] \cap [c-\delta, c+\delta]$, on ait

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} - L \right| \leqslant \varepsilon; \tag{1}$$

auquel cas ce nombre réel L est appelé le *nombre dérivé fort* de f au point c, et noté $Df(c)$.

Remarque 10. — Le lecteur comparera la définition ci-dessus avec la définition de dérivabilité (ordinaire). Il notera par exemple que l'existence de la dérivée forte permet de contrôler le quotient différentiel $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$ lorsque $[x, y]$ est un intervalle contenu dans $[c-\delta, c+\delta]$ *même si* cet intervalle *ne* contient *pas* le point c. Ainsi, on peut comprendre comment la notion de P-partition *librement ancrée* suggère l'introduction de cette notion de dérivée forte.

Pour illustrer le propos de notre remarque, démontrons un *théorème fondamental* dans le cadre de la théorie de l'intégrale de Lebesgue.

***Théorème 11* (Théorème fondamental)**. — *Supposons que la fonction* $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ *soit fortement dérivable en tout point de* $[a, b]$. *Alors, la fonction* $DF : [a, b] \to \mathbb{R}, x \mapsto DF(x)$ *est Lebesgue-intégrable sur* $[a, b]$ *et on a*

$$\int_a^b DF(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Démonstration. — Il nous suffit de voir que le nombre réel $I = F(b) - F(a)$ vérifie la définition 7 d'intégrabilité au sens de Lebesgue de la fonction DF sur l'intervalle $[a, b]$. Fixons donc $\varepsilon > 0$, définissons $\eta = \varepsilon/(b-a)$ et remarquons qu'à chaque point $c \in [a, b]$, la Définition 9 associe un réel positif $\delta(c) > 0$ de sorte que l'inégalité (1) soit satisfaite pour tous $x, y \in [a, b] \cap [c-\delta(c), c+\delta(c)]$. Ceci définit une application positive $\delta : [a, b] \to]0, \infty[$.

Fixons $\{(c^1, [a^1, b^1]), (c^2, [a^2, b^2]), \ldots, (c^m, [a^m, b^m])\}$ une P-partition δ-fine de $[a, b]$ *librement ancrée* dans $[a, b]$ et supposons en outre — pour fixer les idées — que les intervalles sont ordonnés de façon croissante :

$$a = a^1 < b^1 = a^2 < b^1 = \cdots = a^m < b^m = b.$$

En particulier nous avons $[a^j, b^j] \subseteq [c^j - \delta(c^j), c^j + \delta(c^j)]$ pour chaque $1 \leqslant j \leqslant m$; de la Définition 9 on tire donc pour chaque $1 \leqslant j \leqslant m$ l'inégalité

$$\left| \frac{F(b^j) - F(a^j)}{b^j - a^j} - DF(c^j) \right| \leqslant \eta$$

que l'on récrit

$$|F(b^j) - F(a^j) - DF(c^j)(b^j - a^j)| \leqslant \eta(b^j - a^j). \tag{2}$$

D'autre part, remarquons que l'on a

$$F(b) - F(a) = \sum_{j=1}^{m} [F(b^j) - F(a^j)]. \tag{3}$$

De l'inégalité triangulaire, (3) et (2) nous tirons maintenant

$$\left| [F(b) - F(a)] - \sum_{j=1}^{m} DF(c^j)(b^j - a^j) \right| \leqslant \sum_{j=1}^{m} |F(b^j) - F(a^j) - DF(c^j)(b^j - a^j)|.$$

et

$$\left| [F(b) - F(a)] - \sum_{j=1}^{m} DF(c^j)(b^j - a^j) \right| \leqslant \eta \sum_{j=1}^{m} (b^j - a^j) = \eta(b - a) = \varepsilon. \tag{4}$$

Si nous nous résumons, nous venons de voir qu'à chaque $\varepsilon > 0$ correspond une application positive $\delta : [a, b] \to]0, \infty[$ telle que pour chaque P-partition δ-fine $\{(c^j, [a^j, b^j])\}_{1 \leqslant j \leqslant m}$ librement ancrée dans $[a, b]$, on ait

$$\left| [F(b) - F(a)] - \sum_{j=1}^{m} DF(c^j)(b^j - a^j) \right| \leqslant \varepsilon.$$

□

Remarque 12. — Si la technique de la preuve précédente montre bien comment on met en application la Définition 7 de l'intégrale de Lebesgue, il n'en reste pas moins que le Théorème 11 ne constitue pas une révolution. En effet, on peut montrer à l'aide du théorème de la moyenne qu'une fonction est fortement dérivable en tout point d'un intervalle si et seulement si elle est de classe C^1 sur cet intervalle. Le Théorème 11 n'est donc que la version classique du théorème fondamental pour les fonctions de classe C^1 — version qui peut d'ailleurs être démontrée dans le cadre de la théorie de Riemann de l'intégrale.

La section suivante est consacrée à la preuve du théorème de convergence monotone — théorème qui, cette fois, n'est *pas valable* dans la théorie de Riemann.

4. Convergence monotone

Commençons par éclairer notre propos par un exemple.

Exemple 13. — Pour chaque entier $k \geqslant 1$, définissons une fonction $f_k : [0,1] \to \mathbb{R}$ par $f_k(0) = 0$ et par

$$f_k(x) = \begin{cases} k & \text{si } 0 < x \leqslant \frac{1}{k^2}, \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{si } \frac{1}{k^2} < x \leqslant 1. \end{cases}$$

Les graphes des fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4 sont présentés à la figure 1. La suite

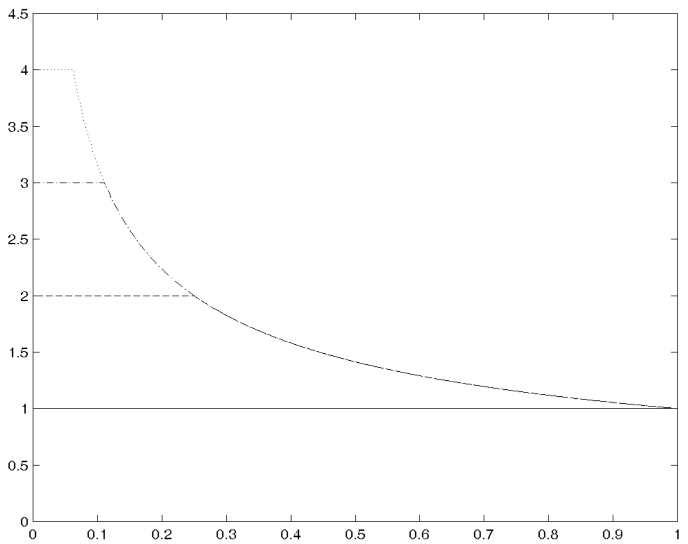

FIG. 1. Les graphes de f_1, f_2, f_3 et f_4.

de fonctions (f_k) croît et converge simplement vers la fonction f définie sur l'intervalle $[0,1]$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{si } x > 0; \end{cases}$$

on entend par là que la suite $(f_k(x))$ croît vers $f(x)$ pour *chaque* $x \in [0,1]$.

En outre, on calcule pour chaque k l'intégrale (au sens de Riemann ou de Lebesgue)

$$\begin{aligned}\int_0^1 f_k(x)\,dx &= \int_0^{1/k^2} k\,dx + \int_{1/k^2}^1 [2\sqrt{x}]'\,dx,\\ &= \frac{1}{k} + 2\left(1 - \sqrt{\frac{1}{k^2}}\right),\\ &= 2 - \frac{1}{k}.\end{aligned}$$

Ainsi, la suite $\left(\int_0^1 f_k(x)\,dx\right)$ croît vers le nombre 2. On aurait envie d'écrire

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} \int_0^1 f_k(x)\,dx = 2, \tag{5}$$

mais il faudrait déjà pour cela que l'intégrale $\int_0^1 f(x)\,dx$ fasse sens. Ce n'est pas le cas en théorie de l'intégrale de Riemann : f n'est pas bornée *or toute fonction Riemann-intégrable est bornée* ! Grâce au théorème de convergence monotone, nous allons voir que l'intégrale $\int_0^1 f(x)\,dx$ fait sens dans la théorie de Lebesgue et que l'égalité (5) a lieu dans ce cadre.

Fixons $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction Lebesgue-intégrable sur $[a,b]$. Si $\delta : [a,b] \to]0,\infty[$ est associée à $\varepsilon > 0$ par la Définition 7 et si $\{(x^j,[a^j,b^j]\}_{1\leqslant j\leqslant m}$ est une P-partition δ-fine de $[a,b]$ librement ancrée dans $[a,b]$, alors on a

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \sum_{j=1}^m f(x^j)(b^j - a^j)\right| \leqslant \varepsilon;$$

ceci se récrit, en vertu de l'additivité de l'intégrale,

$$\left|\sum_{j=1}^m \left[\int_{a^j}^{b^j} f(x)\,dx - f(x^j)(b^j - a^j)\right]\right| \leqslant \varepsilon; \tag{6}$$

le lemme de Saks (1897-1942) et Henstock (1923-2007) étend l'inégalité (6) au cas où $\{(x^j,[a^j,b^j]\}_{1\leqslant j\leqslant m}$ est une P-*division* δ-fine librement ancrée dans

$[a,b]$, i.e. au cas où

$$\bigcup_{j=1}^{m}[a^j,b^j] \subsetneq [a,b].$$

***Lemme 14* (Saks-Henstock).** — *Soient $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction Lebesgue-intégrable sur $[a,b]$ et $\delta:[a,b]\to]0,\infty[$ associée à $\varepsilon>0$ par la Définition 7. Si $\{(x^j,[a^j,b^j]\}_{1\leqslant j\leqslant m}$ est une P-division δ-fine ancrée dans $[a,b]$, alors*

$$\left|\sum_{j=1}^{m}\left[\int_{a^j}^{b^j} f(x)\,dx - f(x^j)(b^j-a^j)\right]\right| \leqslant \varepsilon.$$

La démonstration de ce résultat, un peu technique, peut être passée lors d'une première lecture.

Démonstration. — Choisissons des intervalles $[c_1,d_1]$,$[c_2,d_2]$,..., $[c_k,d_k]$ contigus aux intervalles $[a^1,b^1]$,$[a^2,b^2]$,..., $[a^m,b^m]$ de sorte que

$$\bigcup_{j=1}^{m}[a^j,b^j]\cup\bigcup_{i=1}^{k}[c_i,d_i]=[a,b].$$

Fixons $\eta>0$ et choisissons pour chaque $1\leqslant i\leqslant k$ une P-partition δ-fine $\mathcal{P}_i := \{(y_i^l,[c_i^l,d_i^l])\}_{1\leqslant l\leqslant r_i}$ de $[c_i,d_i]$ librement ancrée dans $[c_i,d_i]$ pour laquelle on a

$$\left|\int_{c_i}^{d_i} f(x)\,dx - \sum_{l=1}^{r_i} f(x_i^l)(d_i^l-c_i^l)\right| \leqslant \frac{\eta}{k}. \tag{7}$$

On obtient une P-partition δ-fine de $[a,b]$ librement ancrée dans $[a,b]$ en formant l'union de la P-division donnée dans l'énoncé et de toutes ces P-partitions $\mathcal{P}_i$, $1\leqslant i\leqslant k$. Écrivons maintenant

$$\int_a^b f(x)\,dx - \sum_{j=1}^{m}\int_{a^j}^{b^j} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{k}\int_{c_i}^{d_i} f(x)\,dx$$

et déduisons de cela que

$$\sum_{j=1}^{m}\left[\int_{a^j}^{b^j} f(x)\,dx - f(x^j)(b^j-a^j)\right] =$$

$$\underbrace{\int_a^b f(x)\,dx - \sum_{i=1}^{k}\sum_{l=1}^{r_i} f(x_i^l)(d_i^l-c_i^l) - \sum_{j=1}^{m} f(x^j)(b^j-a^j)}_{\text{(I)}}$$

$$+\underbrace{\sum_{i=1}^{k}\left[\sum_{l=1}^{r_i} f(x_i^l)(d_i^l-c_i^l) - \int_{c_i}^{d_i} f(x)\,dx\right]}_{\text{(II)}}$$

Or nous avons $|(\mathrm{I})| \leqslant \varepsilon$ (nous avions remarqué plus haut que l'union de la P-division de l'énoncé et des $\mathcal{P}_i$, $1 \leqslant i \leqslant k$ constitue une P-partition de $[a,b]$ librement ancrée dans $[a,b]$) ainsi que

$$|(\mathrm{II})| \leqslant \sum_{i=1}^{k}\left|\int_{c_i}^{d_i} f(x)\,dx - \sum_{l=1}^{r_i} f(x_i^l)(d_i^l-c_i^l)\right| \leqslant k\cdot\frac{\eta}{k} = \eta$$

en utilisant (7). Il vient donc

$$\left|\sum_{j=1}^{m}\left[\int_{a^j}^{b^j} f(x)\,dx - f(x^j)(b^j-a^j)\right]\right| \leqslant \varepsilon+\eta$$

d'où le résultat puisque $\eta > 0$ est arbitraire. □

Nous pouvons maintenant énoncer et démontrer un *théorème de convergence monotone*, souvent associé au nom du mathématicien italien Beppo Levi (1875-1961).

***Théorème 15* (Levi).** — *Soient $f_k, k \geqslant 1$ et f des applications à valeurs réelles définies sur $[a,b]$. Supposons que*

1. *pour chaque entier $k \geqslant 1$, la suite (f_k) croît et converge simplement vers f ;*
2. *chacune des fonctions $f_1, f_2, \ldots$ est Lebesgue-intégrable sur $[a,b]$ et $L = \lim_k \int_a^b f_k(x)\,dx < \infty$.*

Alors, f est Lebesgue-intégrable sur $[a,b]$ et $\int_a^b f(x)\,dx = L$.

Démonstration. — Fixons $\varepsilon > 0$, posons $\eta = \varepsilon/[2 + (b - a)]$ et choisissons un entier i tel que l'on ait $0 < L - \int_a^b f_k(x)\,dx < \eta$ pour tout $k \geqslant i$. Pour chaque $a \leqslant x \leqslant b$, il existe aussi un entier $i(x) \geqslant i$ tel que $0 < f(x) - f_k(x) < \eta$ pour tout $k \geqslant i(x)$. Choisissons aussi une suite (δ_k) d'applications positives $\delta_k : [a, b] \to]0, \infty[$ — que l'on peut supposer décroissante quitte à remplacer δ_k par $\min\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k\}$ — telles que pour toute P-partition δ_k-fine $\mathcal{P}_k$ librement ancrée dans $[a, b]$, on ait

$$\left|\int_a^b f_k(x)\,dx - S(f_k, \mathcal{P}_k)\right| \leqslant \frac{\eta}{2^k};$$

et définissons une $\delta : [a, b] \to]0, \infty[$ par la formule $\delta(x) = \delta_{i(x)}(x)$.

Fixons maintenant une P-partition δ-fine $\{(x^j, [a^j, b^j])\}_{1\leqslant j\leqslant m}$ librement ancrée dans $[a, b]$ et posons $i' = \max\{i(x^j) : 1 \leqslant j \leqslant m\}$. Pour $i \leqslant k \leqslant i'$, numérotons (le cas échéant) $1 \leqslant j_k^1 < \cdots < j_k^{m_k} \leqslant m$ l'ensemble $\{1 \leqslant j \leqslant m : i(x^j) = k\}$ et observons que la P-division $\{(x^{j_k^l}, [a^{j_k^l}, b^{j_k^l}])\}_{1\leqslant l\leqslant m_k}$ est δ_k-fine et librement ancrée dans $[a, b]$, de sorte que le lemme de Saks-Henstock garantit

$$\left|\sum_{l=1}^{m_k}\left[\int_{a^{j_k^l}}^{b^{j_k^l}} f_k(x)\,dx - f_k(x^{j_k^l})(b^{j_k^l} - a^{j_k^l})\right]\right| \leqslant \frac{\eta}{2^k}. \tag{8}$$

En outre, observons que pour tout $x \in [a, b]$, on a $i \leqslant i(x) \leqslant i'$ par définition de i et i'. Il vient donc, pour tout entier k :

$$\sum_{j=1}^{m} f_k(x^j)(b^j - a^j) = \sum_{k=i}^{i'}\left[\sum_{l=1}^{m_k} f_k(x^{j_k^l})(b^{j_k^l} - a^{j_k^l})\right]. \tag{9}$$

Pour $i \leqslant k \leqslant i'$ on trouve en particulier $0 < f(x^{j_k^l}) - f_k(x^{j_k^l}) < \eta$ pour tout $1 \leqslant l \leqslant m_k$, et par conséquent

$$0 < \sum_{k=i}^{i'}\left[\sum_{l=1}^{m_k}[f(x^{j_k^l}) - f_k(x^{j_k^l})](b^{j_k^l} - a^{j_k^l})\right] < \eta(b - a). \tag{10}$$

Finalement, observons que

$$\int_a^b f_i(x)\,dx = \sum_{k=i}^{i'}\left[\sum_{l=1}^{m_k}\int_{a^{j_k^l}}^{b^{j_k^l}} f_i(x)\,dx\right] \leqslant \sum_{k=i}^{i'}\left[\sum_{l=1}^{m_k}\int_{a^{j_k^l}}^{b^{j_k^l}} f_k(x)\,dx\right]$$
$$\leqslant \sum_{k=i}^{i'}\left[\sum_{l=1}^{m_k}\int_{a^{j_k^l}}^{b^{j_k^l}} f_{i'}(x)\,dx\right] = \int_a^b f_{i'}(x)\,dx;$$

de sorte qu'après avoir retranché L à chaque membre des inégalités précédentes et rappelé le choix de l'entier i en début de preuve, nous obtenons

$$0 < L - \sum_{k=i}^{i'}\left[\sum_{l=1}^{m_k}\int_{a^{j_k^l}}^{b^{j_k^l}} f_k(x)\,dx\right] < \eta. \tag{11}$$

Finalement, en combinant les inégalités (8) à (11), nous trouvons en utilisant l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}
\left|L - \sum_{j=1}^{m} f(x^j)(b^j - a^j)\right| &\leqslant \left|L - \sum_{k=i}^{i'}\left[\sum_{l=1}^{m_k}\int_{a^{j_k^l}}^{b^{j_k^l}} f_k(x)\,dx\right]\right| \\
&+ \sum_{k=i}^{i'}\left|\sum_{l=1}^{m_k}\left[\int_{a^{j_k^l}}^{b^{j_k^l}} f_k(x)\,dx - f_k(x^{j_k^l})(b^{j_k^l} - a^{j_k^l})\right]\right| \\
&+ \sum_{k=i}^{i'}\left|\sum_{l=1}^{m_k}[f_k(x^{j_k^l}) - f(x^{j_k^l})](b^{j_k^l} - a^{j_k^l})\right|, \\
&\leqslant \eta + \sum_{k=i}^{i'}\frac{\eta}{2^k} + \eta(b-a), \\
&\leqslant [2 + (b-a)]\eta = \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

5. Conclusion

Nous avons, dans ce petit exposé, montré comment on peut définir très concrètement — par un procédé de passage à la limite sur des sommes de Riemann relatives à des divisions de plus en plus fines — l'intégrale de Lebesgue d'une fonction réelle d'une variable réelle, sur un intervalle.

En guise de conclusion, montrons comment on peut, par une modification formellement simple de la Définition 7, découvrir une notion d'intégrale encore plus générale que celle de Lebesgue, qui a l'avantage d'intégrer toutes les dérivées (ordinaires).

Commençons d'abord par remarquer que le lemme de Cousin garantit en fait l'existence, étant donné $\delta : [a,b] \to]0,\infty[$, d'une P-partition δ-fine $\mathcal{P} = \{(x^j,[a^j,b^j])\}_{1\leqslant j\leqslant m}$ de $[a,b]$ telle qu'en outre, x^j soit un élément de $[a^j,b^j]$ pour chaque $1 \leqslant j \leqslant m$ (on ne parlera plus dans ce cas de P-partition librement ancrée).

Si, dans la Définition 7, nous remplaçons l'expression "P-partition δ-fine librement ancrée dans $[a,b]$" par "P-partition δ-fine de $[a,b]$", nous obtenons une définition de l'intégrale de Kurzweil (1926-) et Henstock (1923-2007).

Aussi appelée intégrale de Denjoy (1884-1974) et Perron (1880-1975), elle fut introduite indépendamment (et dans des formulations très diverses) par Arnaud Denjoy en 1912, Oskar Perron en 1914, Jaroslav Kurzweil en 1957 et Ralph Henstock en 1960.

Il est évident, à la lumière de ce qui précède, que toute fonction intégrable au sens de Lebesgue est intégrable au sens de Kurzweil et Henstock (il existe plus de P-partitions δ-fines librement ancrées que de P-partitions δ-fines !).

Par contre, la réciproque de ce résultat est fausse. En effet, le lecteur pourra s'inspirer de la preuve du théorème fondamental (Théorème 11) présentée plus haut et prouver la version plus fine du théorème fondamental que voici.

Théorème 16 **(Théorème fondamental).** — *Supposons que la fonction* $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ *soit dérivable en tout point de* $[a,b]$*. Alors, la fonction dérivée* $F' : [a,b] \to \mathbb{R}, x \mapsto F'(x)$ *est intégrable au sens de Kurzweil et Henstock sur* $[a,b]$ *et on a*

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Ainsi, la fonction définie sur $[0,1]$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0, \\ 2x\sin\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2} & \text{sinon}\,; \end{cases}$$

qui n'est autre que la dérivée (ordinaire) de la fonction F définie sur $[0,1]$ par la formule

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0, \\ x^2 \sin \frac{1}{x^2} & \text{sinon}\,; \end{cases}$$

est intégrable au sens de Kurzweil et Henstock sur $[0,1]$. On peut montrer cependant que f n'est *pas* intégrable au sens de Lebesgue sur $[0,1]$, la divergence de $\int_0^1 |f(x)|\,dx$ se comparant à celle de la série harmonique (voir par exemple [**5**]). Il y notera au passage que la différence essentielle entre l'intégrale de Lebesgue et celle de Kurzweil et Henstock réside dans le caractère *absolu* de la première, que ne possède pas la seconde.

Mentionnons aussi que la recherche en théorie de l'intégration a fait la part belle, après Kurzweil et Henstock, aux définitions basées sur les sommes de Riemann. Selon la classe de P-partitions impliquée dans la Définition 7, on dispose de théories de l'intégrale plus ou moins riches. Étudier leurs propriétés permet de comprendre comment les caractéristiques des P-partitions influent de manière décisive sur celles des fonctions intégrables. Le lecteur pourra avoir une idée de l'éventail des théories que l'on obtient en consultant [**3**].

Finalement, il serait injuste de ne pas rendre à J. Mawhin le rôle de pionnier qui lui revient. En publiant [**4**] puis [**5**] et en professant leurs contenus respectifs a plusieurs générations de mathématiciens de l'université de Louvain, il fut le premier — et, longtemps, le seul ! — à avoir misé sur l'approche riemannienne pour enseigner l'intégrale de Lebesgue par le biais de celle de Kurzweil et Henstock. D'autres, parmi lesquels Bartle (1927-2003) et Sherbert [**1**], l'ont suivi et le suivent encore. À l'occasion de son éméritat, nous le félicitons chaleureusement et lui exprimons notre infinie reconnaissance.

Références

[1] R. G. Bartle et D. R. Sherbert. *Introduction to real analysis.* John Wiley & Sons. Third Edition, 2000.

[2] R. A. Gordon. *The integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron and Henstock.* American Mathematical Society, 1994.

[3] J. Kurzweil. *Integration between the Lebesgue integral and the Henstock-Kurzweil integral. Its relation to local convex vector spaces.* World Scientific, 2002.

[4] J. Mawhin. *Introduction à l'analyse.* Cabay, 1979.

[5] J. Mawhin. *Analyse. Fondements, techniques, évolution.* De Boeck Éditions, 1997.

[6] E. J. McShane. *A unified theory of integration.* Americal Mathematical Monthly **80**, pp. 349-359, 1973.

Le 31 octobre 2008

Adrien Lebègue et Laurent Moonens, département de mathématique (Université catholique de Louvain) ; chemin du cyclotron, 2 ; 1348 Louvain-la-neuve (Belgique). *E-mail :* adrienlebegue@gmail.com, laurent.moonens@uclouvain.be