Quelques réflexions sur la nature des modèles mathématiques

Daniel Justens
IREM de Bruxelles-HEFF
Place Anneessens, 11
1000 Bruxelles - Belgique
daniel.justens@scarlet.be

La notion de *mathématique* pose problème. On n'en connaît pas de définition universellement acceptée. Le mathématicien Jean Dieudonné n'hésitait pas à déclarer[1] :

> *Si l'on demande « qu'est-ce que les mathématiques ? », ou « que fait un mathématicien ? », il est rarissime qu'on obtienne de l'interlocuteur autre chose qu'une réponse saugrenue s'il n'a pas reçu un enseignement mathématique allant au moins jusqu'à la fin des deux premières années de l'université.*

Si l'on passe sur le mépris relatif aux non mathématiciens contenu dans cette proposition, il n'en demeure pas moins que le fonds en est bien réel : définir correctement la discipline mathématique n'est pas une évidence. L'opinion de Michel Demazure (Président de la Cité des Sciences et de l'Industrie de la Villette), exprimée avec plus de tact, n'est pas fondamentalement différente :

> *Il n'y a guère de discipline plus mal connue et plus mal décrite que la mathématique. Combien pourraient répondre à la question : « les mathématiques ça parle de quoi ? ça porte sur quoi ? ça propose quel but ? »*

Le même problème se pose manière plus générale lorsque l'on tente de donner une définition cohérente de toute activité scientifique. Le philosophe Karl Popper a bien heureusement déblayé le terrain en proposant la notion de falsification : est scientifique, une théorie qui peut être réfutée. Ce n'est pas un paradoxe mais une avancée significative de notre mécanisme de pensée.

Il n'en demeure pas moins que les notions de « science » et plus précisément de « mathématique » sont des concepts flous pour lesquels il ne semble exister aucune définition acceptable par le cénacle des acteurs dans ces disciplines. Nous allons oser quelques propositions argumentées tout en étant loin d'être définitives.

Un peu d'histoire

C'est l'un des inventeurs de la logique, le mathématicien et philosophe allemand Friedrich Ludwig Gottlob Frege (1848 ~ 1925) qui va poser les bases de la réflexion contemporaine en distinguant 3 mondes, 3 empires selon ses propres termes : le monde réel, le monde des émotions et le troisième mode, le troisième empire (qu'il a baptisé curieusement[2] « Das drittes Reich ») est le monde des idées, monde auquel appartiennent évidemment toutes les activités scientifiques.

Cette idée sera formalisée par celui que l'on peut considérer comme l'un des plus importants philosophe du 20e siècle : Karl Raimund Popper[3] (1902, Vienne – 1994, Londres) :

---

1 *Pour l'honneur de l'esprit humain,* Hachette, 1987, collection « Pluriels », page 15.
2 On peut le dire car à la fin de son existence, Frege nourrissait une grande sympathie pour les thèses racistes d'un presque inconnu de l'époque, un certain Adolf Hitler.
3 *La société ouverte* Collection « champs - Flammarion » n°318, page 121 (relecture par Popper en 1984).

Le monde 1 est notre environnement physique habituel y compris les organismes naturels
Le monde 2 est celui de nos expériences subjectives, le monde de nos espoirs, de nos craintes, de nos pensées
Le monde 3 est le monde des théories en soi, le monde du contenu des livres

Pour Popper ces trois mondes interagissent mais sont distincts. Cette façon de voir établit une distinction entre matériel et spirituel qui n'est plus nécessaire aujourd'hui comme nous allons l'établir dans la suite. Ce qui est surtout remarquable dans la pensée de Popper, c'est la notion de *falsificationnisme* que l'on peut présenter schématiquement comme suit. Toute attitude scientifique comprend 3 phases que l'on peut reprendre en boucle indéfiniment :

- l'élaboration d'une théorie
- la confrontation avec les faits
- la réfutation ou conservation provisoire de la théorie

Dans cette optique, est scientifique toute théorie réfutable ! Reprenons les termes mêmes du philosophe[4] :

> *La science se compose de théories qui sont notre œuvre. Nous construisons des théories, nous allons vers le monde avec nos théorie. Mais le monde ne nous livre aucune information si nous n'allons pas vers lui en l'interrogeant : nous demandons au monde si telle ou telle théorie est juste ou est fausse. Ensuite nous soumettons ces questions à l'examen le plus approfondi possible sans jamais parvenir à aucune certitude.*

Assez curieusement, pour certains philosophes, cette façon de pensée est réductrice et peu enthousiasmante. Ainsi selon Laurence Bouquiaux[5] :

> *Le falsificationnisme présente l'avantage de reposer sur une démarche logiquement valide. Mais il y a un prix à payer : il faut renoncer à l'idée qu'il existe des vérités scientifiques*

Est-ce vraiment un prix à payer ? La seule vraie question que l'on peut se poser est tout simplement : « l'hypothèse de l'existence de vérités scientifiques nous est-elle utile? ». En quoi cette hypothèse non réfutable[6] (donc non scientifique) peut-elle nous servir dans notre démarche de compréhension? Il me semble que poser la question revient à y répondre. Cette hypothèse ne nous permet en rien d'augmenter notre capacité de gestion ou de compréhension de l'univers. Sans cette hypothèse, notre démarche prend autant de sens : nous tentons simplement de donner la meilleure description possible de notre conception du réel étant donné nos moyens et notre information limités.

Premières définitions

Nous pouvons à présent proposer une première définition (partiellement auto-référente donc critiquable) de la notion de « science ». Procédons en deux étapes. On appelle « modèle », toute construction mentale (monde 3) hypothético-déductive (mathématique ?) ou descriptive (scénario) permettant la gestion localement dans le temps d'un fragment de phénomène appartenant au monde 1. On appelle « science », l'ensemble (au sens naïf) des modèles réfutables ayant été confrontés au réel (monde 1) et non encore invalidés par cette confrontation.

Envisageons à présent une description succincte de l'attitude scientifique. Le point de départ commun à toute investigation est l'observation de situations concrètes et le relevé de mesures

4 op. cit. Page 61.
5 Entre croyances et connaissances, où se situe l'enseignant ? In *CIFEN, Centre interfacultaire des enseignants,* n° 27, avril 2010, Ulg, pages 29 à 35.
6 Ce n'est pas parce que nous ne pouvons établir de « vérités » que celles-ci n'existent pas.

associées à certains éléments bien ou mal choisis faisant partie intégrante de ces observations (phase 1). Le choix de ces mesures pourrait sembler a priori arbitraire. Il apparaît historiquement que ce n'est pas le cas. Certains ensembles de mesures conduisent à des résultats scientifiques, d'autres pas. C'est ici que s'observe un phénomène difficilement qualifiable ou quantifiable, qui s'appelle l'intuition. Afin d'éviter tout malentendu, nous considèrerons l'intuition comme une démarche analytique rationnelle partiellement inconsciente. On peut aussi y inclure une certaine dose de préjugés, d'idées préconçues. Dans ce cas, l'efficacité de la démarche n'aura pas nécessairement le niveau espéré.

Après cette phase expérimentale on tente un premier passage à la théorisation et à la construction de modèles (phase 2). Ces derniers peuvent s'identifier à des structures mentales représentant une partie des situations concrètes étudiées. Ces modèles prennent la forme de systèmes hypothético-déductifs ou de scenarii que l'on espère non contradictoires. Cet espoir peut être vain : on ne sait toujours pas aujourd'hui si l'axiomatique de la théorie des ensembles, qui constitue le fondement des objets mathématiques utilisés dans la plupart des applications est non contradictoire.

Suit ensuite une procédure de validation des modèles par « comparaison » entre les observations et les résultats annoncés ou prévus par les modèles (phase 3). Il s'agit d'une procédure utilisant les modèles dans un cadre descriptif. Ces représentations mentales sont ajustées « au mieux » aux observations. Cette étape est fondamentale, elle procède de ce que nous nommons « compréhension » d'une situation. Lorsque mesures effectivement observées et résultats prévus par le système hypothético-déductif retenu et calibré, ne diffèrent pas trop, nous considérons nos hypothèses comme acceptables provisoirement et estimons avoir « compris » le phénomène, avoir proposé un schéma explicatif compatible avec les observations. De nouvelles mesures, différentes, ont obligatoirement pour conséquence le rejet du modèle et la recherche d'un autre système englobant l'ensemble de toutes les observations.

Cette phase nous permet de définir la notion de *compréhension* d'un fragment de réel : on a compris un phénomène, lorsqu'on peut en produire un modèle non contradictoire sous forme descriptive ou hypothético-déductive, qui en donne une présentation synthétique conduisant à des résultats ne s'écartant pas trop des observations.

C'est ici que commence à se construire le monde des *mathématiques*. Il ne retient que les structures mentales associées aux phénomènes qu'ils doivent représenter. Ces structures détachées de contexte réel sont alors réutilisables, elles peuvent être complétées, améliorées. D'autres structures obéissant aux mêmes exigences de cohérence peuvent être proposées, agrandissant l'ensemble du matériel dans lequel les scientifiques peuvent puiser.

Lorsqu'un modèle est accepté, on passe enfin à une procédure d'analyse des conséquences de la représentation mentale du réel que l'on vient de valider en tentant d'anticiper des résultats non encore mesurés (phase 4). Une nouvelle phase expérimentale peut alors avoir lieu donnant naissance à un nouvel ensemble de mesures concrètes. Ces nouveaux résultats sont à nouveau confrontés au modèle et peuvent une nouvelle fois conduire à son acceptation ou à son rejet. Dans ce cas, il y a utilisation des modèles dans un cadre prédictif.

Remarquons que la phase prédictive n'est pas obligatoire. Aucun modèle n'a été autant validé que le modèle synthétique amélioré de l'évolution basé sur les travaux de Darwin (modèle descriptif de1859 validé entre autre par la découverte de la génétique). Néanmoins, ce modèle ne sera jamais prédictif. Nul ne peut anticiper ce que seront les animaux ou les plantes du futur.

Résumons : un modèle est construit en phase 2, validé et éventuellement accepté en phase 3 et ensuite utilisé dans la phase 4 lorsque la phase 3 est jugée satisfaisante. Une analyse critique conduit on l'a vu au retour à la phase 1 puis à nouveau à la phase 3, le modèle subissant de nouveaux tests de validation. C'est cette remise en question perpétuelle qui fait la richesse et l'efficience de l'attitude scientifique.

C'est néanmoins cette remise en cause et l'obtention de résultats toujours partiels qui est mise en avant par certains pour dévaloriser la démarche des scientifiques, par comparaison avec les affirmations définitives - mais non vérifiables - des gourous. C'est le cas des fanatiques religieux qui prétendent apporter des réponses à toute question. C'est également le cas de certains philosophes pour qui le recours aux hypothèses d'existence de vérités absolues est une nécessité pour justifier la construction de leur système de pensée.

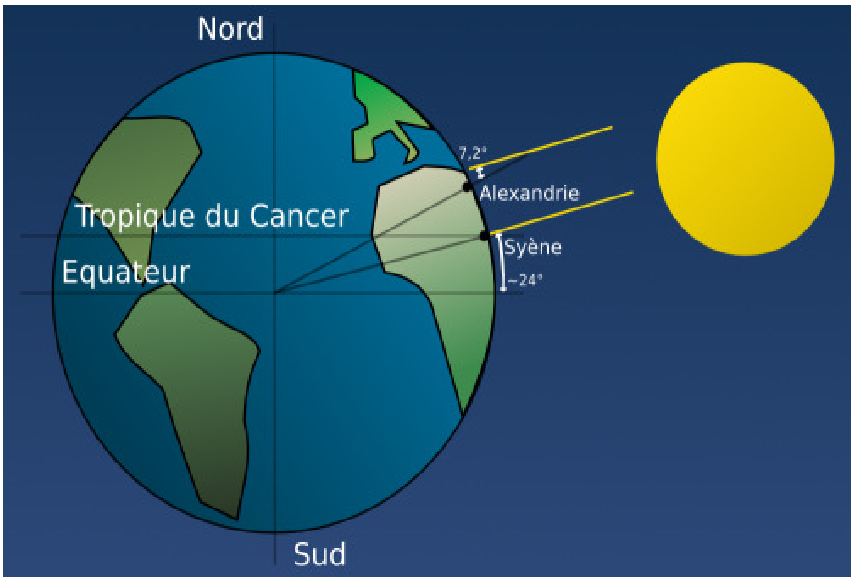
Nous entendons montrer que ces hypothèses sont inutiles et, d'une certaine façon, réductrices. En effet, dans un cadre où un problème est définitivement résolu, il n'y plus de place ni pour la recherche, ni pour l'enthousiasme qu'elle peut engendrer. Un monde de vérités absolues est un monde mort intellectuellement. Et je suis personnellement heureux de savoir que le théorème de Gödel a définitivement mis un terme au projet prétentieux de Hilbert.

Déduction versus induction

Pour Popper, la seule démarche cohérente est déductive et tout part des modèles[7] :

> *L'idée de l'induction est en définitive la suivante – et je précise que je décris là quelque chose que je tiens pour faux du début à la fin - : tout savoir nous vient de nos organes des sens, c'est le principe de base. Et lorsque les mêmes effets ont agi pendant longtemps et très fréquemment sur les organes sensoriels, nous émettons une hypothèse généralisatrice.*
>
> *Le véritable apprentissage n'est pas inductif, c'est toujours une démarche d'essais et d'erreurs entreprise avec la plus grande activité dont nous soyons capables.*

On peut peut-être comprendre le point de vue de Popper en tant que physicien (un exemple suit) mais en tant qu'économiste, des nuances s'imposent.



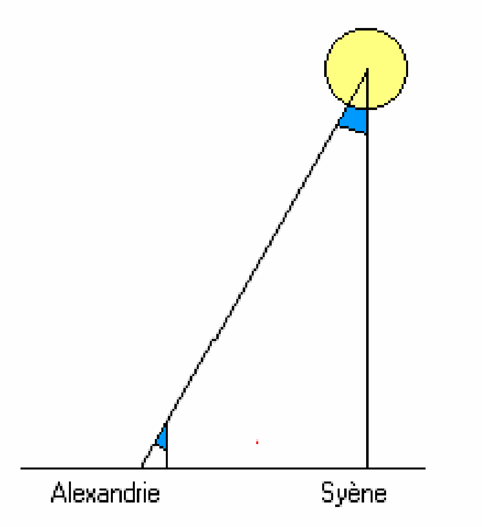
Illustrons tout d'abord le premier point de vue en prenant pour exemple le modèle d'Ératosthène (276 – 194 BC) qui lui permit de calculer une approximation remarquable du diamètre de la terre.

L'observation lors du solstice d'été du fond d'un puits à Assouan (l'antique Syène) éclairé sans ombre aucune à midi, et, le même jour de l'année au même instant, de l'ombre d'une colonne à Alexandrie, conduisit Ératosthène à proposer le modèle basé sur les 3 hypothèses suivantes :

7 op. cit. Page 33.

H1 : la terre est sphérique.
H2 : le soleil est situé à très grande distance de la terre et ses rayons sont presque parallèles.
H3 : la lumière se propage en ligne droite.

Nous avons aujourd'hui validé le modèle d'Ératosthène.



Mais à l'époque, les mêmes observations auraient pu conduire à une représentation tout à fait différente du système solaire. Envisageons en effet le modèle :

H1 : la terre est plate.
H2 : le soleil est un petit astre situé près de la terre. Ses rayons ne sont plus parallèles.
H3 : la lumière se propage en ligne droite.

Cette représentation est parfaitement conforme aux observations et conduit évidemment à une toute autre image mentale. Force nous est donc de reconnaître une certaine intuition au précepteur du pharaon Ptolémée IV.

Venons-en à notre contre exemple. Les « sciences économiques » font-elles partie de notre ensemble baptisé *« science »* ? La question mérite d'être posée mais il faut bien constater que, depuis quelques décennies, les économistes et les financiers usent et abusent des mathématiques pour donner du poids à leurs conclusions.

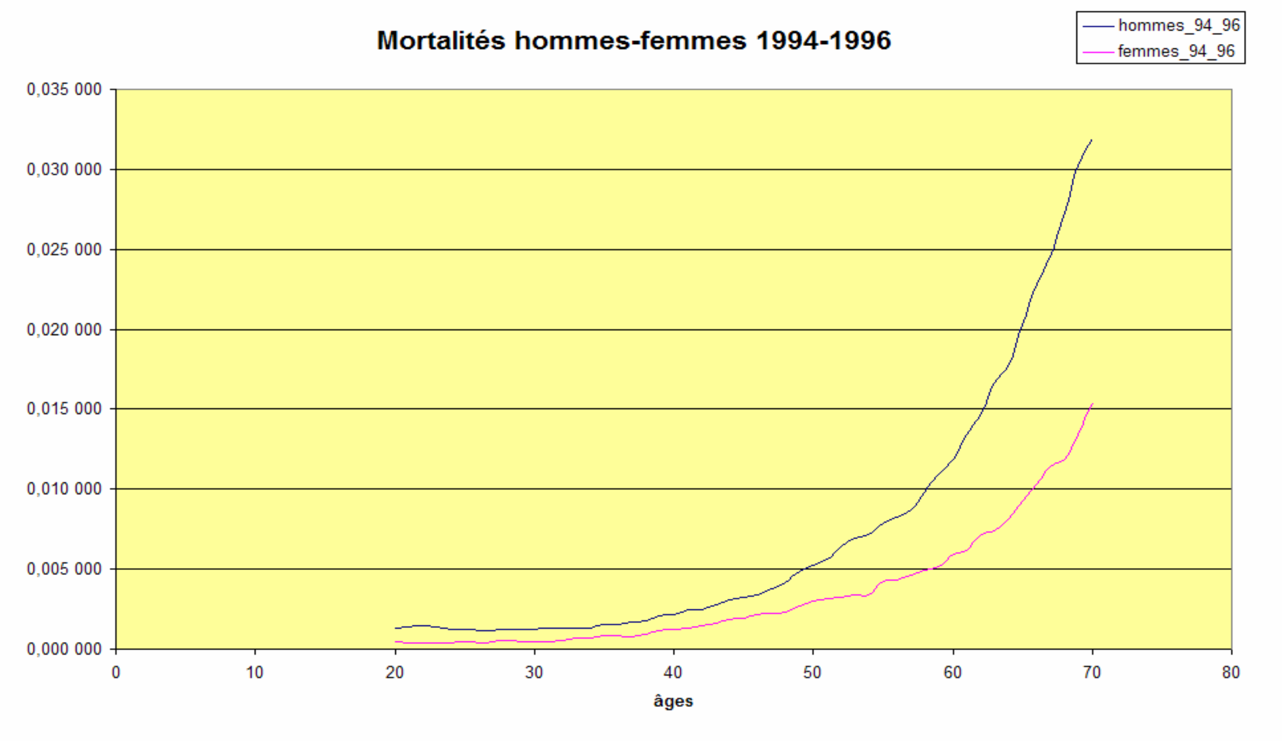
La différence essentielle entre l'utilisation des modèles en physique et en économie réside dans le fait qu'il est parfaitement impossible de réaliser une expérience économique répétable dans des conditions comparables, afin d'assurer la validation d'une représentation : on doit toujours se contenter d'observations partielles imposées par le monde réel.

De plus, l'intervention de la variable temps nécessite toujours une hypothèse lourde et non vérifiée : la permanence des résultats observés.

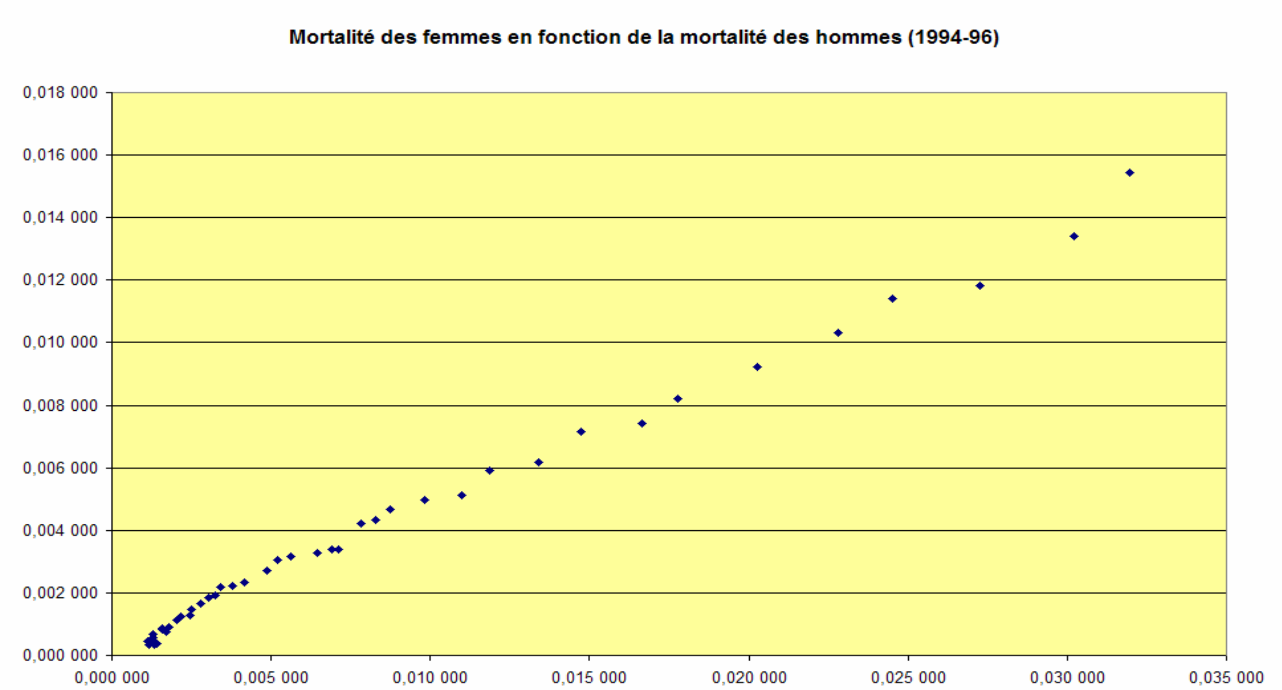
Néanmoins, certaines observations peuvent nous conduire à une modélisation utile. Dans ce sens, des modèles sont induits par les faits, contrairement aux a priori de Popper. Prenons pour illustration un modèle actuariel décrivant la mortalité d'une population en fonction de l'âge et du sexe.

Le graphique qui suit représente les taux de mortalité des hommes et des femmes en France de 20 à 70 ans observés entre 1994 et 1996, ce qui, par classe d'âge, permet deux observations seulement.

Ceci explique une certaine volatilité observée pour des catégories d'âge permettant peu d'observations.

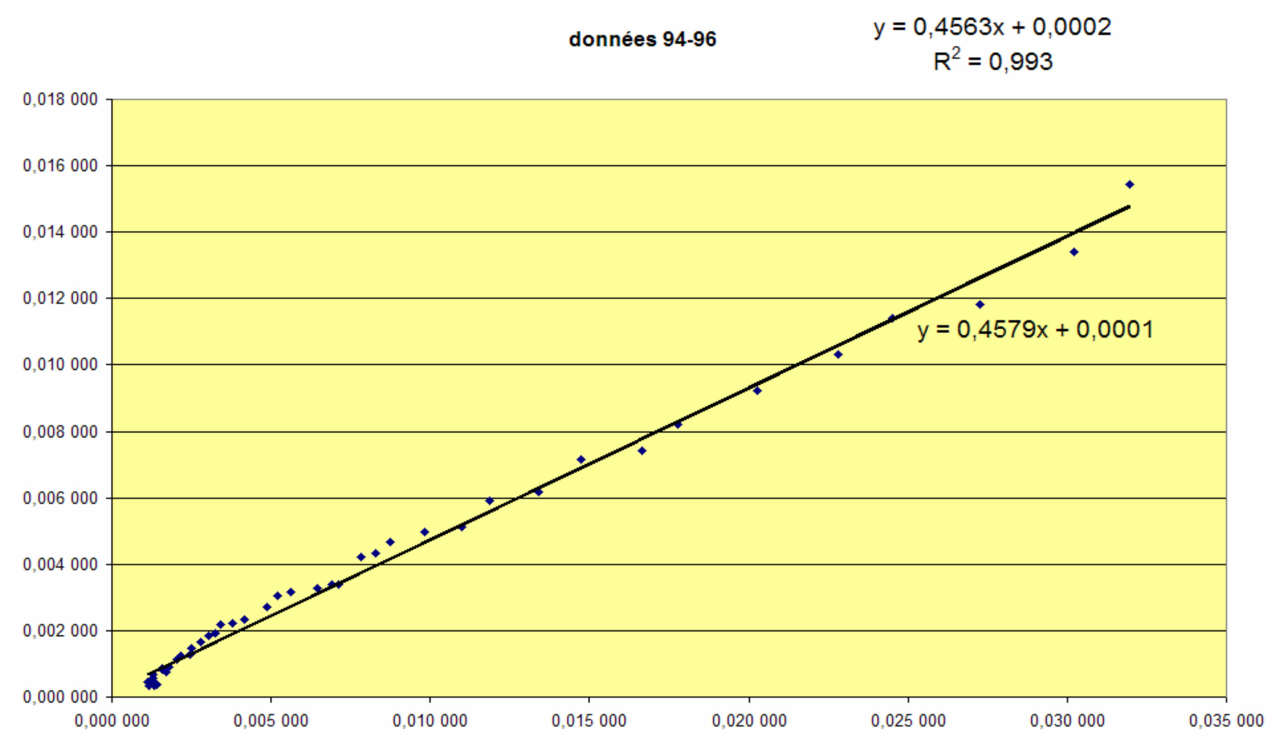


On observe qu'hommes et femmes constituent deux populations manifestement distinctes. Mais comment quantifier simplement ces différences en fonction du sexe ? Pour introduire explicitement cette distinction, on décide de représenter cette fois les taux de mortalité féminins en ordonnées et les taux masculins en abscisses[8]. Le résultat obtenu est surprenant. S'établit presque naturellement une représentation affine, si pas vectorielle :



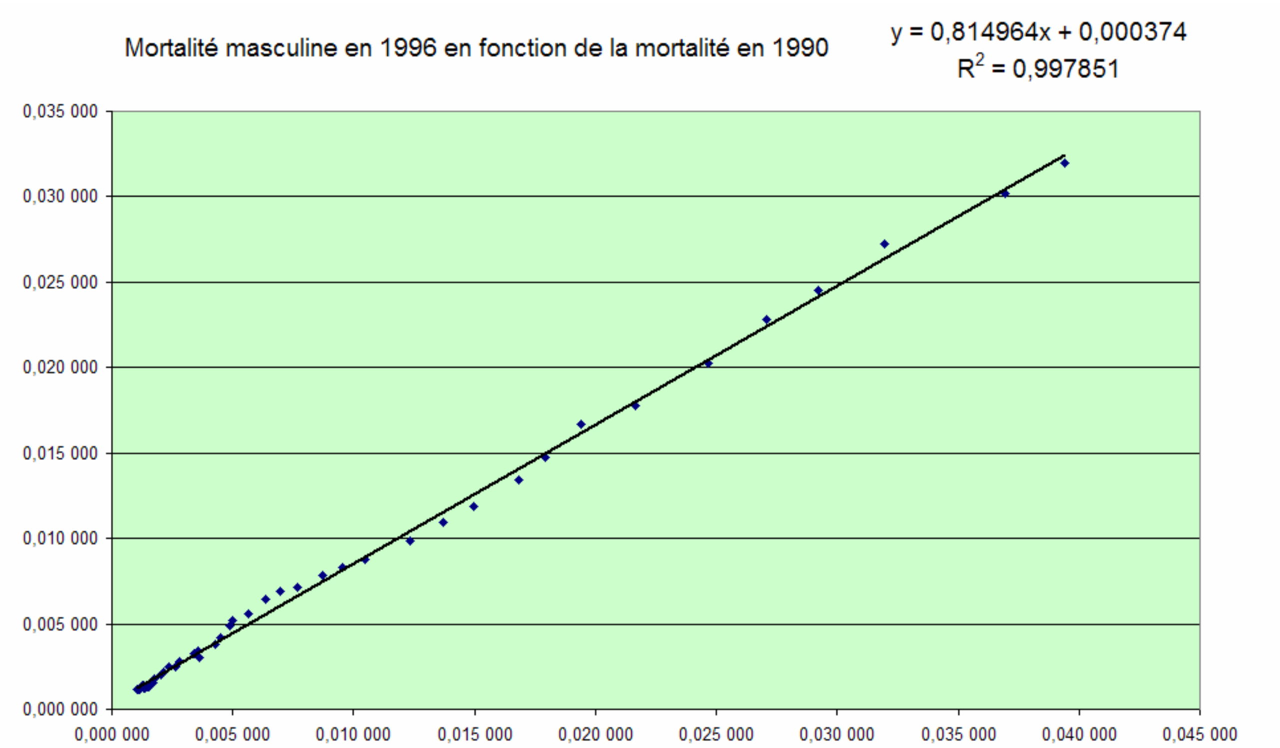
Le réflexe est alors souvent de procéder à une régression linéaire qui n'a évidemment pas de sens dans ce cas précis, les deux variables jouant des rôles absolument symétriques. Certes la forte détermination rend l'hypothèse de linéarité manifestement réaliste mais la mise en équation ne peut se faire que par le recours à la notion de composante principale. Le graphique qui suit donne la représentation de cette composante (équation $y = 0.4579\ x + 0.0001$) et également l'équation de la droite de y en x ($y = 0{,}4563\ x + 0{,}0002$), de pente légèrement plus faible comme il se doit.

8 Ce choix est évidemment arbitraire.



En gros, on constate que la composante est presque vectorielle. On peut donc résumer l'information de cette base de données en affirmant : la mortalité des femmes vaut approximativement 46% de la mortalité des hommes. Le modèle ainsi développé (simple proportionnalité) est entièrement dicté par les observations.

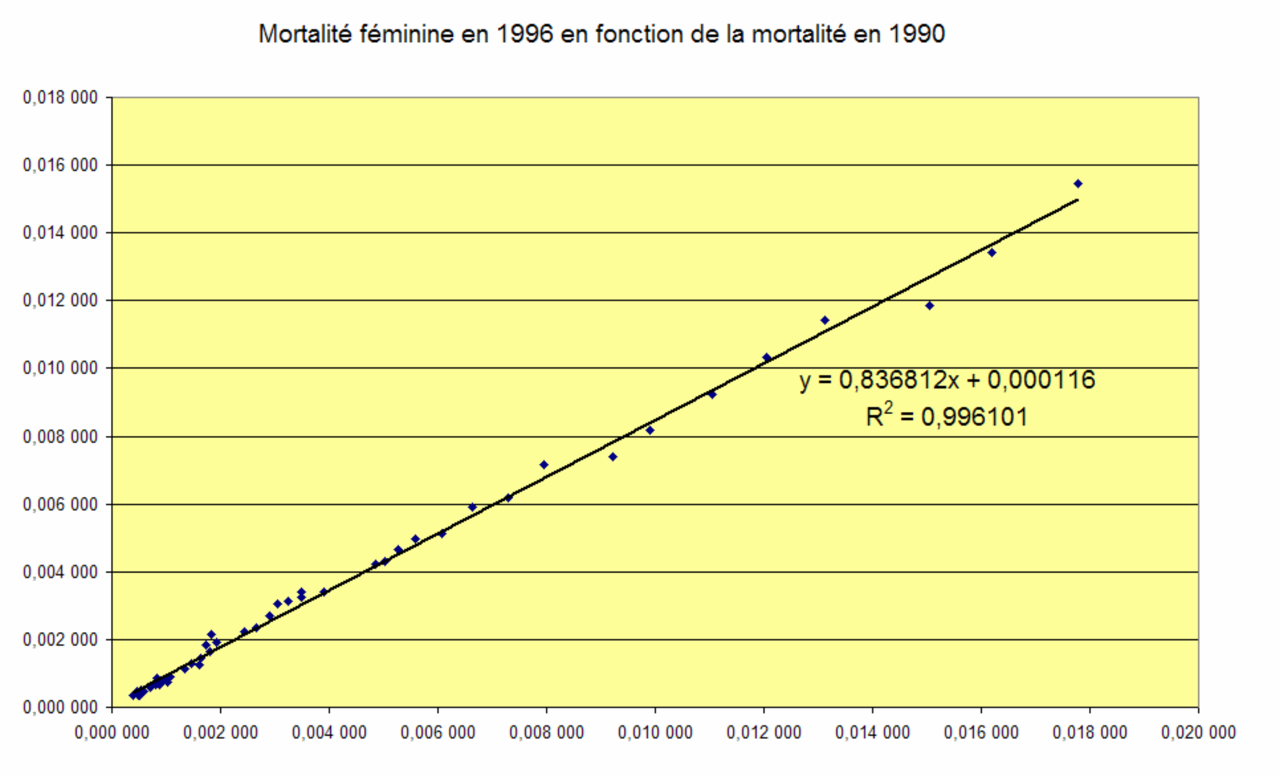
Observons à présent l'évolution de la mortalité des hommes entre 1990 et 1996. Le graphique donne cette fois :



Dans ce cas-ci, la régression linéaire a un sens : on tente de calculer la mortalité en 1996 en fonction de la mortalité observée en 1990.

Encore une fois, une relation affine, voire vectorielle semble évidente. On peut donc écrire que la mortalité en 1996 est approximativement égale à la mortalité en 1990 multipliée par un coefficient d'atténuation (0,815). On peut aussi établir une loi, voire un modèle, exprimant toute simplement que cette mortalité a, en 6 ans, diminué de 18,5%. En tablant sur un coefficient d'atténuation constant par an, on peut même construire un modèle projectif totalement inspiré par les observations.

On remarque que l'atténuation de la mortalité est un peu plus faible pour la population féminine :



Nous avons établi sur base inductive, au moins localement, des lois parfaitement utilisables. Reste à admettre que le domaine exploré appartient bien à l'ensemble « science » ...

Le rasoir d'Occam[9]

Il est assez remarquable de constater à quel point philosophes et mathématiciens aimaient avoir recours à l'hypothèse d'existence de lois immuables, universelles, éternelles. Cette attitude est-elle d'un apport quelconque au progrès scientifique? En vertu du principe du rasoir d'Occam, écartant drastiquement toute hypothèse non nécessaire, nous ne le pensons pas. Beaucoup de mathématicien font néanmoins cette hypothèse en postulant l'existence d'un monde mathématique pré existant, immuable à la découverte duquel ils partent comme autant d'explorateurs intrépides. L'argument est toujours le même : les propriétés découvertes par les mathématiciens sont vraies de toute éternité.

Des arguments de ce type sont aussi introduits par des personnalités plus médiatiques que scientifiques pour justifier de l'existence d'un être suprême. Nous pensons par exemple aux frères Bogdanov dont le dernier opuscule a bénéficié d'une couverture médiatique exorbitante étant donné le peu de teneur scientifique de l'ouvrage. L'exemple qu'ils citent explicitement est toujours le même : le théorème de Pythagore est vrai depuis toujours et éternellement.

9 Guillaume d'Occam (1285 - 1347), franciscain philosophe logicien et théologien scolastique anglais.

Ce genre de propos dénote une très mauvaise connaissance du contenu des objets mathématiques. Qu'est un théorème? Il s'agit d'une propriété découlant d'un ensemble d'axiomes choisi plus ou moins rationnellement et donc en fait, implicitement contenue dans ces axiomes et dans les définitions introduites dans le cadre du modèle. Dans le cas du théorème de Pythagore, les axiomes choisis permettent la construction de l'espace euclidien qui est une excellente représentation mentale de notre monde usuel mais uniquement localement. Nous vivons en effet sur une sphère. Sur une sphère le théorème de Pythagore n'a aucun sens puisque l'on peut y construire un triangle trirectangle équilatéral.

Ces propos nous ramènent à notre sujet : comment arriver à donner une définition acceptable de la notion de « mathématique »? Historiquement, les premiers objets mathématiques étaient tous totalement ancrés dans le réel dont ils devaient donner une représentation utilisable pragmatiquement. C'est le cas du plus ancien d'entre eux, le fameux bâton d'Ishango[10], comme de la plupart des tablettes cunéiformes babyloniennes, des collections de résultats et d'exercices égyptiens dont nous disposons.

C'est aussi le cas des éléments d'Euclide qui donnaient une représentation mentale remarquable et surtout utilisable de la réalité physique observable, même si certains résultats semblaient obtenus pour le seul plaisir de l'esprit. C'est en Grèce que naît le concept de « mathématicien ». En effet, les élèves de Pythagore se divisaient en deux groupes. Les *ακουστικοι* recevaient un enseignement sans aucune démonstration donné par le disciple Hippase de Métaponte[11]. (*ακουστικοι*, du grec *ακουσματα* qui signifie « les choses entendues »). Les véritables initiés, les *μαθεματικοι* recevaient quant à eux l'enseignement complet donné par Pythagore en personne. (Leur désignation provient du terme *μαθεματα* qui signifie « les choses apprises »). On le voit l'aspect sectaire des prêtres de la mathématique ne date pas d'hier et l'on comprend mieux les propos déjà cités de Jean Dieudonné qui disait en substance « seuls les mathématiciens savent ce que sont les mathématiques », que l'on peut traduire par « seuls les initiés ont accès au savoir ». Les principes communs aux religions et à la mathématique sont plus nombreux qu'on ne pense.

Ces exemples nous permettent d'émettre plusieurs propositions. Tout d'abord, il existe un lien historique entre l'invention progressive des mathématiques et la réalité. On peut donc oser la proposition suivante :

> *On appelle « objet mathématique » toute interface (constituée en fait d'un réseau neuronal) construite par notre cerveau pour concevoir un fragment de réel trop complexe, et sa propre structure. Cette interface permet à notre cerveau l'accès à la compréhension (au sens défini plus haut) d'un fragment de notre univers.*

Un exemple simple va nous permettre d'illustrer le passage du concret vers l'abstrait qui constitue l'essentiel du travail du mathématicien. Dire que « 18 est supérieur à 12 » a un sens. Un panier contenant 18 pommes en contient plus qu'un panier contenant 12 pommes, un immeuble de 18 étages est plus haut[12] qu'un immeuble de 12, un cycliste roulant à 18 kilomètres heures dépasse un cycliste roulant à 12 km/h. Le concept « 18 est supérieur à 12 » est donc tout simplement la formalisation de relations de ce type observables entre objets.

Mais, m'opposera-t-on, étant donné leur côté abstrait, les mathématiques pourraient-elles ne reposer que sur des relations matérielles ? De plus, certains concepts mathématiques anticipent leur correspondant réel. Tout se passe comme si l'esprit humain était capable d'imaginer mentalement des relations non encore observées mais qui pourront éventuellement être découvertes dans la

---

10 La première règle à calcul connue : elle date de plus de 20000 ans.
11 Qui fut exclu du cénacle pour avoir montré l'irrationalité du nombre « racine de deux ».
12 Cela dépend de la hauteur des étages.

nature ultérieurement. Certains concepts abstraits développés par les mathématiciens dits « purs » n'ont pas encore (ou n'auront peut-être jamais) d'équivalent dans le monde qui nous entoure. Pour évacuer ce problème apparent, il suffit d'émettre la thèse selon laquelle notre cerveau est une machine capable de construire une gamme étendue de relations, que ces dernières aient été observées ou non. Cette thèse est reprise par les neurologues[13]. Dans ce cadre, les objets mathématiques pourraient être constitués de réseaux neuronaux particuliers[14]. Ils deviendraient matériels.

Ce point de vue nous permet de comprendre la difficulté de communication. Si tous les concepts se réduisent à des réseaux neuronaux, il parait peu probable d'avoir à admettre que tous ces réseaux éminemment complexes soient absolument identiques chez tous les individus. Un concept doit alors être compris comme la classe d'équivalence des réseaux neuronaux qui conduisent à une utilisation identique de son contenu. Ce genre de considération est classique des concepteurs des réseaux neuronaux artificiels pour lesquels les processus d'apprentissage mis en œuvre conduisent à des systèmes conduisant la plupart du temps à des systèmes donnant les mêmes résultats mais dont la structure, aléatoire et construite indépendamment, est forcément différente. Les mathématiques échappent-elles à ce sentiment d'*à peu près* que nous venons de faire naître ? Les mathématiciens s'épuisent à créer un langage formel le plus éloigné possible des champs sémantiques usuels pour échapper à ce risque. Mais notre scenario permet d'expliquer la multitude d'interprétations que l'on peut donner à chaque concept.

En définissant l'objet mathématique comme étant l'interface entre notre cerveau et le réel, nous avons ouvert une autre boîte de Pandore : qu'est le réel ? Il y a une différence extraordinaire entre notre perception de la réalité et cette réalité. Notre confrontation avec l'univers se fait via nos sens (sélectionnés dans un contexte de survie et non de tentative de modélisation optimale) qui nous livrent une information utilisable certes mais très éloignées de l'essence même des choses que nous nous représentons. Ce que nous appelons *réel* est, au mieux, l'image mentale que nous construisons de l'univers qui nous entoure. Ce que nous prenons pour la réalité n'est jamais que l'information dont nous disposons sur l'univers. Notre réalité subjective pourrait bien n'être en fait qu'une hallucination informationnelle. Ceci est surtout vrai dans l'infiniment petit, aux limites de la matière, ou dans l'infiniment grand aux confins de l'univers observable. C'est ici que le recours aux modèles mathématiques et autres prend tout son sens. Selon N. Bohr :

> *Les mathématiques offrent la clé permettant l'accès à une intuition d'une réalité qui n'est plus nécessairement visible ou tangible immédiatement. Lorsque la réalité se dérobe à notre regard, les mathématiques significatives nous en offrent encore une intuition par la puissance d'un langage riche en invariants.*

En quoi les mathématiques participent-elles à ce type de construction mentale ? Pour que notre cerveau puisse connaître d'abord puis reconnaître les réalités qui nous entourent, il faut que ces dernières manifestent une certaine permanence. La reconnaissance d'un objet ou d'un être implique l'existence d'un acte mental consistant à repérer, classer et enregistrer certaines des caractéristiques permanentes de cet objet ou de cet être.

Pour que nous puissions identifier des objets que nous découvrons et les inclure dans un ensemble structuré, il faut que nous établissions des classes d'équivalences de caractéristiques. C'est ainsi qu'ayant observé quelques chats particuliers, un enfant est à même de reconnaître tous les chats, même celui dessiné par Philippe Geluck[15].

---

13 Voir par exemple le point de vue de Jean-Pierre Changeux développé dans *Matières à pensée,* Collection point, OJ 22.

14 Ou tout au moins de classes d'équivalences de réseaux neuronaux comme nous l'expliquons plus loin.

15 Pourquoi ne puis-je m'empêcher d'y faire référence ?

Le processus mental de reconnaissance est donc lié à la construction d'objets mentaux caractérisés par des invariants et à celle de classes d'équivalences. Or la recherche des invariants et des classes d'équivalences est précisément une part importante de ce que nous baptisons « activité mathématique ».

Les mathématiques constitueraient donc une réserve conceptuelle de structures invariantes dans lesquelles nous pouvons puiser pour mieux concevoir et aborder l'univers réel. Là est son intérêt primordial et probablement son utilité sélective.

L'homme n'est pas un animal particulièrement fort physiquement, il ne court pas très vite. Comment a-t-il fait pour ne pas disparaître, victime des terribles prédateurs qu'il a du affronter ? En fait, étant donné sa morphologie, seul *homo mathematicus* pouvait survivre dans ce monde hostile.

Un contre exemple à l'universalité des mathématiques

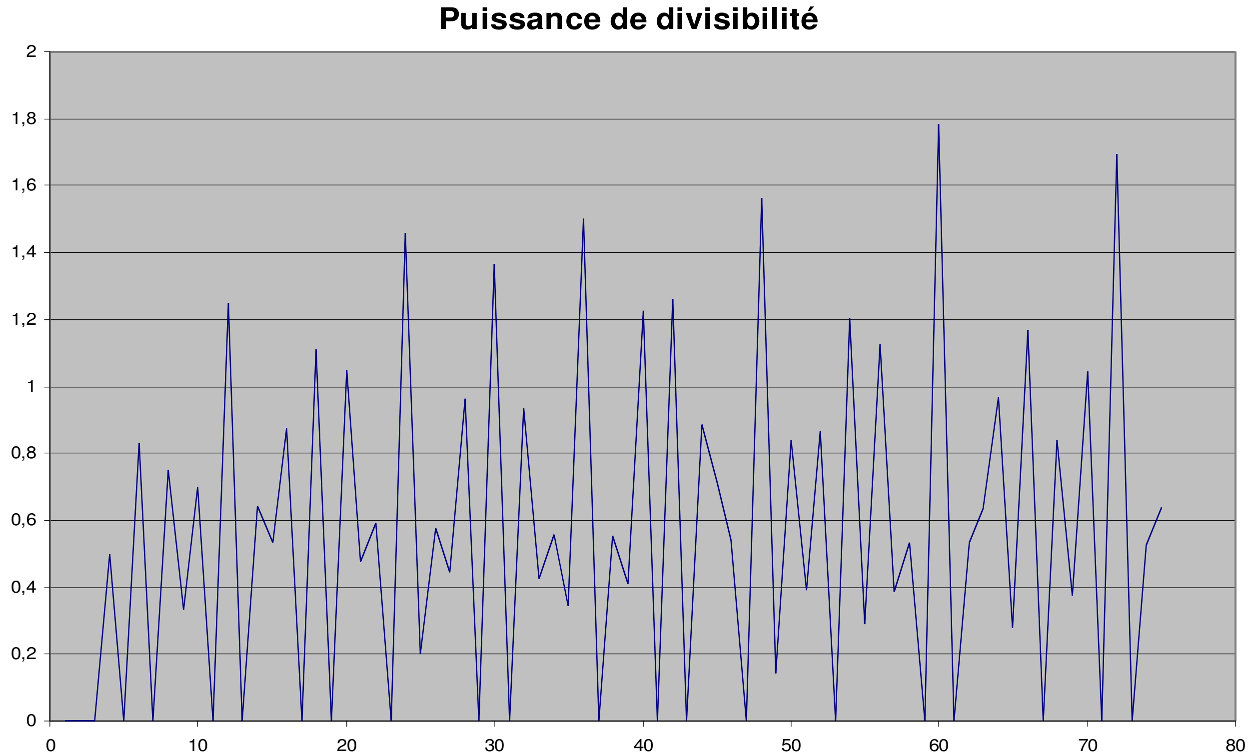
Osons un peu d'humour. La prétention à l'universalité des mathématiques s'appuie sur une multitude d'exemples et relève en cela d'un procédé démonstratif non scientifique. En cela cette prétention sort du cadre mathématique. En effet, l'alignement d'une suite d'exemples plus ou moins convaincants ne constitue en rien une démonstration. Je reprends l'un d'entre eux : il va me servir. *17 est un nombre premier* depuis toujours et cette propriété fait partie du grand livre des vérités ! En fait, cette vérité est simplement contenue dans la définition de « nombre premier » qui est propre à l'espèce humaine et qui n'a rien de « naturel ».

Un exemple simple va nous montrer le défaut de ce type de proposition. Définissons la *puissance de divisibilité d'un nombre naturel* comme le rapport entre la somme de ses diviseurs propres (1 et lui-même exclus) et ce nombre. Cette définition est plus naturelle que celle de *nombre parfait*[16] qui inclut 1 et exclut le nombre dans la prise en compte des diviseurs. Ainsi, on calcule à titre d'exemple $p(24) = (2+12+3+8+4+6)/24 = 35/24 = 1,4583333$. Cette définition nous permet d'énoncer un grand théorème vrai de toute éternité :

La puissance de divisibilité de tout nombre premier est nulle

Nous en laissons la démonstration comme exercice. Trêves d'humour : notre résultat est néanmoins amusant. En représentant la fonction des naturels dans les rationnels positifs $p(n)$, on en vient à comprendre les Babyloniens qui avaient choisi de compter en base 60, dont la puissance de divisibilité est un extremum local. Voyons cela graphiquement (et maladroitement représenté dans excel) :

16 Un nombre parfait est égal à la somme de ses diviseurs, lui-même exclu. 6 est parfait puisque 6 = 1 + 2 + 3.



On peut à nouveau se poser la série de questions : qu'appelle-t-on théorème ou propriété d'un objet mathématique ? Dans quelles mesures, ces derniers ne sont-ils pas dissimulés dans nos définitions ou stimulés par nos axiomes ? Dans cette mesure, peut-on en déduire qu'ils pré-existent ? Ou sont-ils construits par le cerveau du mathématicien qui élabore sa théorie ?

Mais d'autres problèmes se posent qui disparaissent dès que l'on travaille hors hypothèse de pré existence des notions : quelle est la définition de « l'intuition » ? Qu'en est-il des propositions indécidables ?

Les structures mathématiques ont-elles toujours un sens?

On entend souvent les mathématiciens affirmer l'universalité de leur discipline en présentant plusieurs phénomènes totalement indépendants, mais malgré tout susceptibles d'être modélisés par la même structure mathématique. Cet argument est un leurre. Nous allons en apporter la preuve par contre exemple[17]. Certes des réalités très différentes peuvent être représentées par des objets mathématiques identiques. Mais c'est le modélisateur qui impose sa structure au fragment de réel et non l'inverse. Le modèle n'est en rien la représentation des propriétés intrinsèques de ce fragment. Nous allons le montrer en considérant deux problèmes très différents en apparence et néanmoins représentés classiquement dans tous les manuels et dans toutes les formations par la même structure mathématique : le processus d'actualisation en finance et la modélisation des taux de survie d'une population en actuariat financier.

Considérons notre premier problème : la construction d'un processus d'actualisation. Notre démarche va tenter de répondre à la question : quelle est la valeur aujourd'hui ($t = 0$) d'un capital $C(t)$ échéant à l'horizon t ? Pour y arriver, nous utilisons une méthode « déductive » en imposant

17 Pour infirmer une règle, un seul contre exemple suffit. En mathématique. Dans le langage courant, on dit que l'exception confirme la règle. Une proposition sans aucun contenu.

des conditions économiques et mathématiques raisonnables. On fait tout d'abord l'hypothèse économiquement incontournable selon laquelle l'accroissement de capital (bénéfice ou perte) doit être proportionnel au capital. Ceci est évident, si on investit dix fois plus, on gagnera ou on perdra dix fois plus. Cette condition se traduit par l'égalité :

$$C(t + \Delta t) - C(t) = \ldots \; C(t)$$

Choisissons à présent le contexte - déterministe ou stochastique - dans lequel nous entendons travailler. Pour ce faire, il convient de bien comprendre la définition de la notion de dérivée lorsque la variable considérée est le temps. En fait, une fonction dérivable est une fonction localement linéaire. En effet, pour des accroissements suffisamment petits, on ose écrire :

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

Si la première limite existe quelle que soit la suite de valeurs Δx tendant uniformément vers 0, rien ne nous empêche, pour le calcul pragmatique de f' de ne choisir que des valeurs Δx strictement négatives. Lorsque la variable est le temps, le calcul de f' peut donc se faire exclusivement en fonction des observations du passé immédiat. Une fonction du temps dérivable est alors une fonction prolongeable localement. Le phénomène modélisé est localement déterministe. En effet, en choisissant a postériori (après calcul de f') des valeurs Δt strictement positives, la représentation linéaire

$$f(t_0 + \Delta t) = f(t_0) + f'(t_0)\Delta t$$

nous donne localement une description de l'état futur du système (Δt strictement positif) en fonction de son état présent ($f(t_0)$) et de son évolution passée récente ($f'(t_0)$). Une fonction dérivable du temps est donc une fonction localement déterministe puisqu'une description dans un futur proche en est parfaitement possible. Remarquons que la dérivabilité nous livre aussi la propriété suivante : les accroissements de capital sont, localement, proportionnels au temps écoulé[18] :

$$C(t + \Delta t) - C(t) = \ldots \; \Delta t$$

En regroupant nos deux conditions, on obtient :

$$C(t + \Delta t) - C(t) = \ldots \; C(t) \times \Delta t$$

$$C(t + \Delta t) - C(t) = r(t) \;\; C(t) \times \Delta t$$

La dernière équation nous permet d'obtenir une équation différentielle à variables séparées soumises à la condition initiale : $C(t_0) = C_0$, en notant le coefficient de proportionnalité *r(t)*

$$\frac{\Delta C}{\Delta t} = r(t) \;\; C(t)$$

Dont la solution est classique (exponentielle négative à taux variable) :

$$C(0) = C(t) e^{-\int_0^t r(s)ds}$$

Revenons à présent à notre problème initial, la recherche de la valeur actuelle d'un capital futur. C'est le capital futur qui est connu (noté *C(t)*) et l'on cherche sa valeur présente (ici *C(0)*). L'équation précédente peut s'écrire :

18 Le coefficient de proportionnalité étant précisément la dérivée de la fonction en ce point.

$$C(0) = C(t)e^{-\int_0^t r(s)ds}$$

Considérons à présent le modèle viager développé par Benjamin Gompertz (1779-1865) et qui est aujourd'hui encore à la base de la plupart des modèles actuariels. Gompertz propose la modélisation d'une population fictive de survivants à partir d'une population initiale d'effectif S_0 et des probabilités de survie des individus d'âge x, notées p_x et observées pendant un certain nombre d'années. Ces valeurs sont effectivement observables empiriquement. On pose successivement :

$$S_{x+1} = p_x \,.\, S_x$$

Gompertz définit alors le *taux instantané de mortalité par unité de temps* défini naturellement[19] par :

$$\mu_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{S_x} \frac{S_x - S_{x+\Delta x}}{\Delta x}$$

On vérifie que

$$\mu_x = -\frac{d}{dx}[\ln S_x]$$

Ce qui permet de calculer :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[\ln S_x] &= -\mu_x \\
[\ln S_{x+s}]_0^t &= -\int_0^t \mu_{x+s} ds \\
\frac{S_{x+t}}{S_x} &= e^{-\int_0^t \mu_{x+s} ds}
\end{aligned}$$

Le membre de gauche de cette égalité représente le taux de survivants à partir de l'âge x, t années plus tard, ou encore, théoriquement, la probabilité de survivre pendant t années pour un individu d'âge actuel x.

On constate ici que les deux phénomènes réels ont été structurés de la même manière, au moyen d'une fonction exponentielle négative à taux variable. Mais la vraie question se pose ici : les phénomènes sont-ils liés par une même structure ou … est-ce mon cerveau qui, par souci d'économie, leur attribue cette même structure ? Mais il y a une question plus angoissante : cette structure a-t-elle un sens ou s'agit-il d'une coquille vide ? On peut exprimer la question sous un autre forme : l'exponentielle à taux variable traduit-elle certaines caractéristiques du phénomène modélisé ? La réponse à cette question est négative. On peut vérifier assez aisément que toute fonction à variation bornée et continue (pas plus!) peut être représentée par ce type de structure. C'est assez intuitif, il suffit d'adapter l'intégrant de l'exposant ! Pour nous en convaincre, considérons l'exponentielle à taux variable :

$$e^{\int_0^t \frac{1}{(1+\tau)} d\tau}$$

On calcule très aisément :

19 Il s'agit évidemment du nombre de décès calculés par unité de temps (l'accroissement de vieillissement est noté Δx) relativement à la population de départ (S^x) et cela instantanément,ce qui explique la limite.

$$e^{\int_0^t \frac{1}{(1+\tau)} d\tau} = e^{|(ln|1+\tau|)|_0^t}$$
$$= e^{ln|1+t|} = 1 + t$$

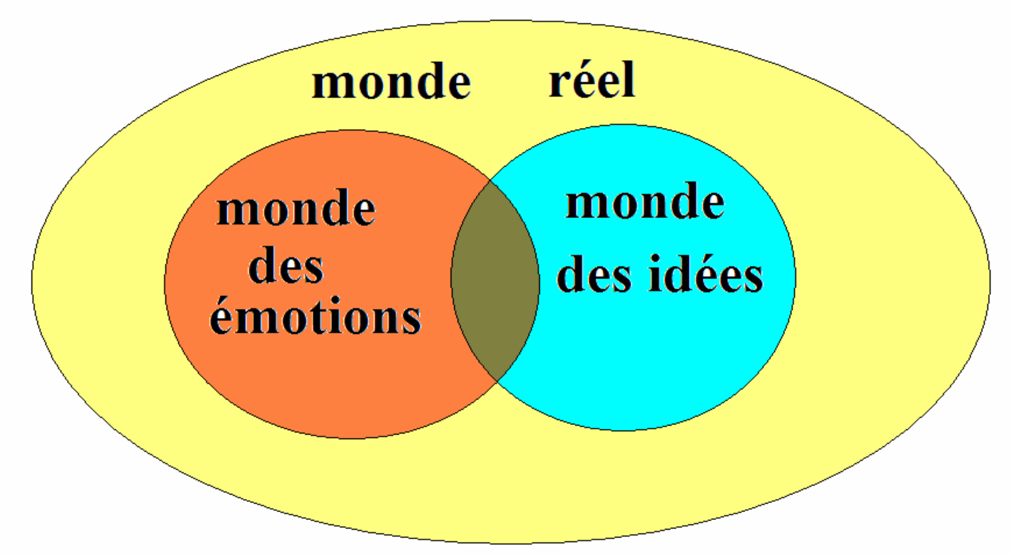
dont le caractère « exponentiel » n'est pas particulièrement manifeste.

Conclusions provisoires

Nous émettons la proposition suivante :

> *Les mondes 2 et 3 de Popper sont des productions matérielles de notre cerveau et sont donc inclus au monde 1.*

Cette proposition est un élément du monde 3 : elle est donc à valider ou invalider. Il semble néanmoins de plus en plus pertinent d'affirmer que ce sont des des processus chimiques qui déterminent nos sentiments, nos ressentis. et des processus électriques qui constituent la structure et le support de nos idées. (voici encore deux propositions de monde 3 à valider ou invalider). Le passage du matériel au spirituel devient alors, non un changement de nature, mais un saut quantitatif: le « spirituel » qualifiant une activité matérielle de grande complexité ! Notre cerveau n'a pas encore nécessairement construit de modèles pour les niveaux de complexité qu'il développe lui-même ! Notre proposition conduit à la représentation suivante dans laquelle les mondes 2 et 3 sont inclus au monde 1.



Cette proposition permet de fournir des éléments de réponse à plusieurs interrogations légitimes.

Que sont les mathématiques dans ce nouveau schéma ? Elles font partie du monde de la réalité (monde 3 inclus au monde 1). Chaque concept correspond à un certain câblage neuronal mais plusieurs câblages différents peuvent représenter la même idée dans deux cerveaux différents; une idée, un concept est donc une classe d'équivalence de câblages neuronaux. Attention : ceci est une théorie du monde 3 et correspond à un certain câblage neuronal : on retombe donc sur une certaine forme d'autoréférence avec tout ce que ce genre de proposition comporte de niveaux d'indécidabilité. Mais ceci est heureux. Encore une fois, le programme de Hilbert rêvant la construction d'un formalisme mathématique définitif et complet est intellectuellement inhibant. Quel joie de vivre dans le non définitif et l'indécidable!

Qu'en est-il du concept souvent rabâché et très difficile à définir de « beauté des mathématiques »? Faisant partie du ressenti, cette notion est un élément – probablement chimique - du monde 2.

Qu'en est-il de l'efficacité des mathématiques ? Nous allons donner à cette question pertinente une réponse se situant à la fois dans le contexte darwinien et suivant la méthode poppérienne. En effet, le processus de validation de Popper joue le rôle de la sélection naturelle dans la jungle du monde 3, qui écarte les modèles moins pertinents pour ne retenir que les plus adaptés à certaines exigences. Sous cet éclairage, les maths ne peuvent qu'être efficaces !

Ce ne sont pas les mathématiques qui sont aptes à décrire le réel, c'est l'inverse : nous baptisons du nom « mathématique » toute structure cérébrale cohérente nous permettant compréhension et gestion efficace de notre univers. Et par extension, toute structure assortie des mêmes qualités de cohérence, que nous baptisons de « mathématique pure ». Galilée avait mis la charrue avant les bœufs en affirmant :

> *La philosophie est écrite dans ce livre gigantesque qui est continuellement ouvert à nos yeux (je parle de l'univers), mais on ne peut le comprendre si d'abord on n'apprend pas à comprendre la langue et à connaître les caractères dans lesquels il est écrit. Il est écrit en langage mathématique.*

Le monde n'est pas écrit en langage mathématique : les mathématiques constituent le langage que la structure particulière de notre cerveau a élaboré pour comprendre et être capable de gérer et d'anticiper certains éléments de la nature.

Pourquoi y a-t-il des mathématiques partout ? Dans le cadre de cet exposé, la question ne se pose plus puisqu'on appelle « mathématique » toute construction mentale (monde 3) permettant la compréhension (au sens défini plus haut) d'un fragment de réel (monde 1). En souhaitant accéder à la compréhension de quoi que ce soit, on met en place une structure mentale que l'on inclut dans l'ensemble « mathématique ». Et cette constatation en amène une autre : on observe que les mathématiques n'ont pas les faveurs du grand public ! Quel dommage ! Pour lui !

Elles représentent en fait le seul moyen, adapté à la structure de notre cerveau, pour comprendre, gérer et modeler notre univers.