

## **La méthode Monte-Carlo : quand des méthodes numériques suppléent à l'absence de solution mathématique**

Daniel Justens

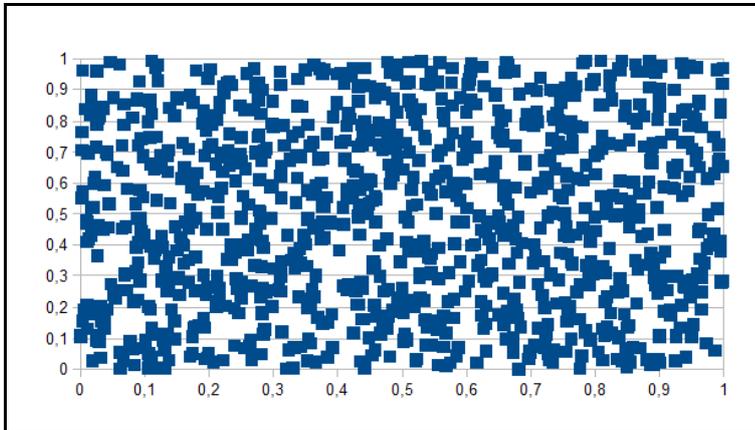
Contrairement à certaines idées reçues, les mathématiques ne constituent pas une science définitive, au sein de laquelle tous les résultats sont établis une fois pour toutes. Bien au contraire, les maths sont en permanence en construction. De nouveaux résultats sont découverts chaque jour et complètent progressivement le grand livre de nos connaissances. Tous les problèmes théoriques ne sont donc pas résolus. Et il en est de même pour de nombreux problèmes pratiques en manque de support mathématique utilisable concrètement. La grande complexité de certains cas de figure en économie, en biologie, en physique, en finance fait que nos mathématiques, toutes satisfaisantes qu'elles puissent sembler, s'avèrent souvent insuffisantes. C'est pour ce type de problèmes que l'informatique se révèle d'un secours incroyablement utile. Parmi les méthodes numériques initiées depuis quelques décennies et rendues pragmatiques grâce à l'informatique, on retrouve la fameuse méthode Monte-Carlo mise au point vers 1947 par le physicien Gréco-Américain Nicholas Constantine Metropolis (1915 – 1999), l'un des collaborateurs de John von Neumann (1903 – 1957). C'est aussi Nicolas Metropolis qui fut l'un des inventeurs d'un des tout premiers ordinateurs opérationnels qu'il baptisa du nom de MANIAC (Mathematical Analyzer, Numerical Integrator And Computer) pour couper court à la mode des acronymes étranges qui désignaient ce genre de machines. MANIAC I fut totalement opérationnel dès 1952.

La méthode de Monte-Carlo s'est révélée particulièrement utile pour le calcul de certaines intégrales portant sur de très larges domaines, donnant en pratique des résultats numériques nettement plus précis que les méthodes classiques déterministes (voir l'article de François Lavallou dans le BIB 34 consacré aux statistiques : pages 98 à 103). Mais cette méthode est également très utile en finance, domaine dans lequel elle permet de quantifier assez exactement le risque par une approche statistique adaptée. La suite de l'article présente la méthode dans ce cadre particulier, en liaison avec les méthodes numériques implémentées.

Considérons un projet d'investissement de montant connu, concrétisant par exemple le rachat d'une entreprise. Quels vont être les résultats de cette entreprise pendant les 10 prochaines années, une durée qui correspond par exemple à la durée maximale d'utilisation de son outil de production. En réalité nul n'en sait rien. Tout au plus dispose-t-on d'informations du passé, qui ne sont en rien garantes des résultats futurs. Pour gérer ce type de problème, on va considérer que les résultats futurs de l'entreprise sont des variables aléatoires de distributions connues. En effet, études de marché et résultats antérieures peuvent nous donner une idée de la tendance des résultats attendus (moyenne) et également de leur niveau de variabilité (écart-type). Reste à choisir un type de distribution pour cette variable aléatoire. Le théorème central limite conduit souvent à choisir une distribution normale. En effet, tout phénomène qui est la somme d'un grand nombre de petits phénomènes aléatoires indépendants de variance finie est distribué normalement. Et l'on considère généralement le résultat d'une entreprise sur un an comme la somme de ses résultats partiels. L'idée de l'équipe de Nicolas Metropolis a été de proposer de simuler artificiellement un grand nombre de futurs possibles de l'entreprise conformément au choix de distribution de probabilité adoptée et ensuite de travailler statistiquement sur les résultats obtenus.

La première difficulté consiste à reproduire artificiellement le hasard. On parle alors de variable « pseudo-aléatoire ». L'idée de départ est de commencer par simuler une distribution uniforme sur l'intervalle  $[0, 1]$  à partir de calculs résolument déterministes. Le tableur excel fournit un opérateur de ce type sous la fonction ALEA(). Mais on peut en construire soi-même assez facilement. Voici un petit algorithme qui ne donne pas de trop mauvais résultats et que chacun peut implémenter facilement sur son PC. Considérons trois entiers (bien choisis) :  $A=2051$ ,  $B_1=2097153$  et  $C=4194304$ . On construit les nombres  $D=A \times B_1$  puis  $D/C$  dont on prend la partie entière  $E[D/C]$ . On

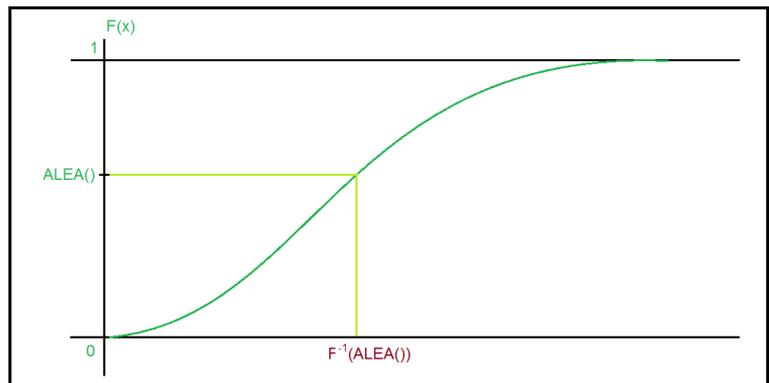
redéfinit  $B_2$  (procédure itérative usuelle en informatique) =  $D - E[D/C] \times C$ . Le nombre  $x = B_2/C$  est bien compris entre 0 et 1. On recommence alors la procédure à partir de  $B_2$ . Numériquement les résultats obtenus se distribuent assez bien pseudo-aléatoirement de manière uniforme. On peut visualiser le résultat en considérant le graphique suivant dans le plan, reprenant 1000 points obtenus par la suite  $(x_1, x_{1001}), \dots, (x_{1000}, x_{2000})$ . On imagine assez mal de faire ce genre d'opérations successives sans l'appui de l'informatique.



On observe une répartition quasi uniforme des points. Notre œil est un assez bon juge de l'uniformité de la dispersion. Nous voici donc capables de simuler aléatoirement (ou presque) une valeur distribuée uniformément sur  $[0, 1]$  qui est précisément l'intervalle image de toute fonction de répartition. En effet, pour une variable aléatoire  $X$  quelconque, la fonction de répartition  $F(x)$  quantifie la probabilité associée à l'ensemble des valeurs pouvant être prises par  $X$  et qui sont

inférieures ou égales à  $X$  :  $F(x) = P[\omega \text{ tels que } X(\omega) \leq x]$ .  $F(x)$  est une fonction croissante dont l'image parcourt l'intervalle  $[0, 1]$ . Les mathématiciens George Edward Pelham Box et Mervin Edgar Muller ont alors proposé vers 1958 de simuler toute variable aléatoire à partir de la réciproque de cette fonction de répartition.

Soit ALEA une variable aléatoire uniformément distribuée sur  $[0, 1]$ . Pour une distribution de probabilité de fonction de répartition  $F(x)$ , la valeur  $F^{-1}(\text{ALEA})$  simule une valeur numérique compatible avec la distribution envisagée. Graphiquement, les choses sont visualisées sur la figure ci-contre. Mais que faire avec la distribution normale dont on sait que la fonction de répartition n'a pas une structure agréable puisque sa densité n'est pas intégrable. Box et Muller suggèrent de travailler à deux dimensions et de passer aux coordonnées polaires. Rappelons la fonction densité  $f(x)$  d'une distribution normale de moyenne  $m$  et d'écart-type  $\sigma$  :



$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2 * \pi} \sigma} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{x-m}{\sigma} \right)^2}$$

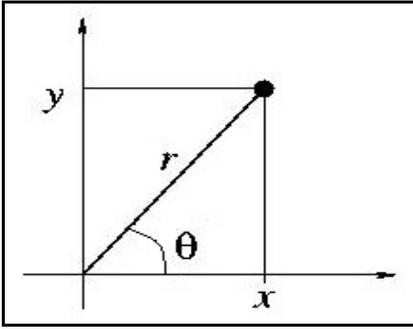
Le passage à une variable centrée réduite simplifie la présentation :

$$z = \frac{x-m}{\sigma} \quad \text{donne} \quad dz = \frac{dx}{\sigma}$$

Toute intégrale sur un domaine  $D$  se transforme en :

$$\int_D \frac{1}{\sqrt{2 * \pi} \sigma} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{x-m}{\sigma} \right)^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2 * \pi}} \int_{D'} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

En dimension 2 et en coordonnées polaires, on représente un point  $(x,y)$  du plan en joignant ce point à l'origine, et en mesurant d'une part l'angle entre ce segment et l'horizontale ( $\theta$ ) et d'autre part la distance entre le point et l'origine ( $r$ ). On a :  $x = r \cos \theta$  et  $y = r \sin \theta$  (voir graphe ci-dessous).  $r$  appartient à  $R^+$  et  $\theta$  parcourt l'intervalle  $[0, 2 \pi]$ .



Le changement de variables dans l'intégrale double impose la multiplication par le *Jacobien*, déterminant de la matrice des dérivées partielles des deux variables de départ relativement aux deux nouvelles variables. ici, il vaut :

$$J = \det \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -r \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r$$

L'intégrale double (sur un certain domaine D) de deux variables normales réduites indépendantes  $x$  et  $y$  se sépare naturellement en deux intégrales simples :

$$\frac{1}{2 * \pi} \iint e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} dx dy = \frac{1}{2 * \pi} \int d\theta \int r e^{-\frac{r^2}{2}} dr$$

La première quantifie une distribution uniforme de la variable  $\theta$  sur l'intervalle  $[0, 2\pi]$ , ce qui est facile à simuler. Pour la deuxième, il suffit de poser  $r^2/2 = t$  ce qui donne  $r dr = dt$  pour arriver à une fonction intégrable dont l'image sur l'ensemble des réels positifs est l'intervalle  $[0, 1]$ , nous permettant à nouveau de recourir aux distributions uniformes :  $\int r e^{-\frac{r^2}{2}} dr = \int e^{-t} dt$ .

On pose donc  $\theta = 2\pi \times \text{ALEA}$  et  $e^{-\frac{r^2}{2}} = \text{ALEA}$ , soit  $r = \sqrt{-2 \ln(\text{ALEA})}$ . La simulation de variables normales réduites se fait alors au moyen de  $z = \sin(2\pi \text{ALEA}) \cdot \sqrt{-2 \ln(\text{ALEA})}$ .

Voyons ce que donnent ces résultats dans le cas de notre exemple. Supposons que l'on acquière une entreprise pour le prix de 10 U.M. (unité monétaire) et que les résultats futurs pour les 10 années à venir peuvent être représentés par des variables aléatoires normales de moyenne 1,5 U.M. et d'écart-type 0,5 U.M. On entre ici dans l'univers incontrôlable des calculs informatiques. Les résultats futurs de l'entreprise sont simulés selon les relations établies, créant ainsi un grand nombre de futurs possibles également probables. Voici un graphe présentant trois trajectoires possibles dans l'espace des futurs compatibles avec nos hypothèses. Pour chaque trajectoire, le futur de l'entreprise est connu et le rendement associé peut être calculé. Toutes ces procédures sont exclusivement numériques et se situent dans le monde informatique. En simulant ainsi un millier de futurs possibles et en y associant les rendements correspondants, on crée une statistique de rendements que l'on peut soumettre aux méthodes usuelles d'interprétation. Avec nos données numériques, on arrive à une distribution de rendements dont la densité observée est représentée ci-contre. La moyenne statistique vaut 0,08154 et l'écart-type 0,02374. Il faut donc s'attendre à un rendement compris entre 2 et 14% avec fiabilité 95%. La méthode Monte-Carlo nous livre ici un résultat inaccessible au moyen de méthodes traditionnelles mais que seule une étroite collaboration entre les deux domaines, mathématiques et informatique a rendu possible.

