

# Modélisation de l'évolution d'actifs à obsolescence rapide : application au matériel informatique

Christian Bihoyiki  
Daniel Justens

HEFF/Économique Type Long  
Unité d'Enseignement et de Recherche *Mathématiques appliquées*  
Place Anneessens, 11 - 1000 Bruxelles - Belgique  
Courriel : daniel.justens@brunette.brucity.be

## ABSTRACT

Toutes les entreprises sont informatisées. Le développement technologique permet de disposer d'ordinateurs de plus en plus petits, performants et d'une capacité de stockage élevée. Ce fulgurant développement entraîne une obsolescence rapide du matériel et place les entreprises devant la nécessité de renouveler fréquemment leurs parcs informatiques. Se pose alors la question du financement du remplacement de ces actifs hautement stratégiques.

Nous présentons ici l'évolution de la technologie informatique et en dégageons un modèle d'obsolescence. Nous utilisons ensuite le modèle pour analyser les contrats de leasing financiers adaptés au remplacement du matériel informatique.

## 1 Evolution de la technologie informatique

Philippe Dubois<sup>1</sup> divise l'histoire de l'informatique en 5 générations. Le passage d'une génération à une autre est caractérisé par une innovation majeure entraînant réduction de taille et augmentation des performances. L'auteur distingue les ordinateurs de première génération qui étaient en fait des calculateurs géants (1945 à 1956), les ordinateurs de deuxième génération (1956 à 1963) utilisant pour la première fois des transistors, les ordinateurs de troisième génération (1964 à 1971) introduisant les systèmes d'exploitation et des circuits intégrés, les ordinateurs de quatrième génération (1971 à nos jours) intégrant les microprocesseurs et permettant progressivement la mise en circulation des premiers PC (1981).

---

<sup>1</sup>Voir [7].

Les ordinateurs de la cinquième génération sont en cours d'élaboration. Ils devraient intégrer l'intelligence artificielle.

## 2 Quantification de l'évolution technologique

Si l'on en croit René Russo<sup>2</sup>, PDG de 9 Telecom et vice-président de Bouygues Telecom :

*L'innovation et les progrès techniques dans ces domaines suivent des lois exponentielles. Ainsi, la performance des circuits intégrés est multipliée par quatre tous les deux ans. La numérisation induit alors une réduction constante et drastique des coûts unitaires de traitement, de stockage et de transport de l'information, quelle que soit la nature de cette information.*

Comment quantifier cette évolution ? Notre mesure doit être indépendante des supports technologiques et permettre une comparaison globale. C'est la raison pour laquelle nous avons opté pour le MIPS : million d'instructions par seconde.

Nous limitons également notre période d'observation aux 35 dernières années (ordinateurs de la quatrième génération incluant les microprocesseurs Intel), les premières générations de machines étant vraiment trop différentes des ordinateurs actuels.

On obtient le tableau suivant décrivant l'évolution des processeurs Intel depuis 1971

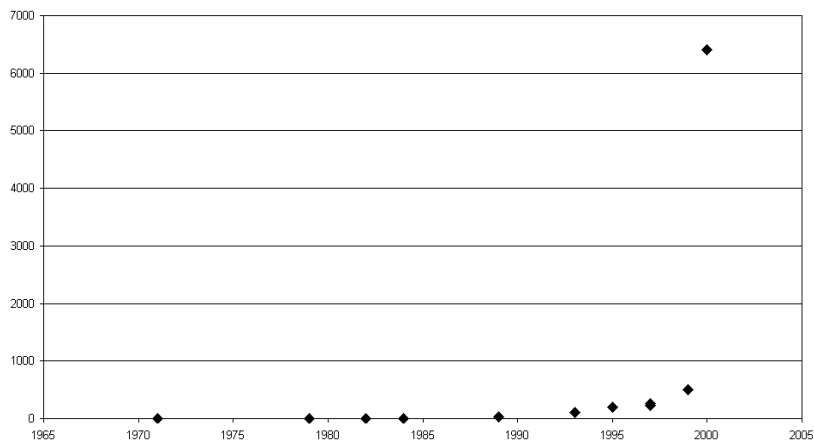
ANNEE	PROCESEUR	MIPS
1971	4004	0,06
1979	8088	0,75
1982	80286	1,5
1984	386	5
1989	486	27
1993	Pentium	100
1995	Pentium Pro	200
1997	Pentium MMX	233
1997	Pentium II	266
1999	Pentium III	500
2000	Pentium IV	6400

Il est intéressant ici de travailler visuellement. Le recours aux techniques sophistiquées de la statistique robuste n'est pas indispensable<sup>3</sup>. Graphiquement, la chronique prend l'aspect suivant :

<sup>2</sup>Voir [10] p. 8.

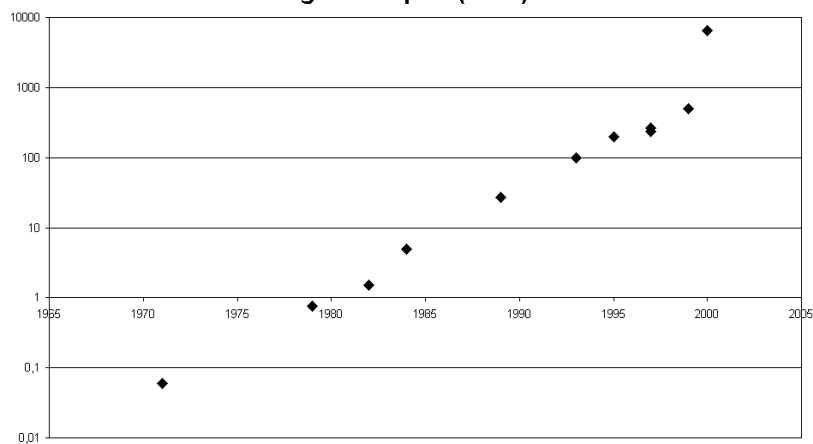
<sup>3</sup>Pour une introduction à la statistique robuste, consulter [6] pp. 111 à 149.

### Visualisation des données brutes (MIPS)



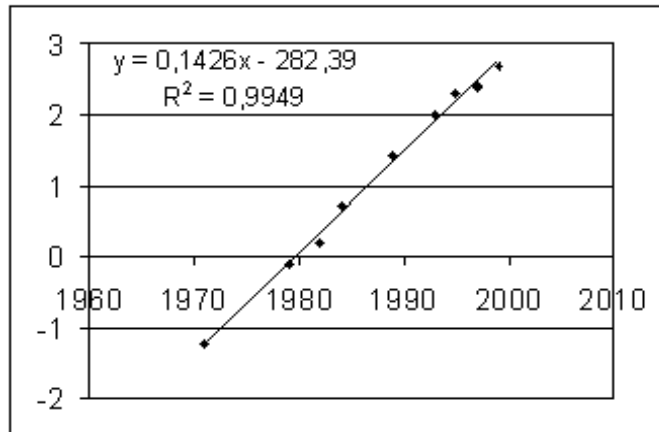
La tendance est effectivement exponentielle mais on constate que la dernière observation est hors tendance. Le passage aux logarithmes (ici en base 10) est encore plus éloquent et met davantage en évidence l'observation contaminante :

### Visualisation des données en coordonnées logarithmiques (MIPS)



Procédons à deux régressions linéaires avec et sans l'outlier manifeste. Sans, on arrive à la régression presque idéale :

## Régression partielle



L'introduction de l'observation litigieuse provoque un léger effet de levier et fait chuter la détermination de 0.9949 à 0.9665.

Procédons à présent à une régression exponentielle des données brutes. La base  $e$  a cette agréable propriété de donner un exposant interprétable puisqu'il s'agit du taux de croissance instantané. Etudions l'évolution de ce taux de croissance en tenant compte de l'horizon temps considéré :

horizon	taux de croissance	détermination
1971-1984	0.3242	0.9849
1971-1989	0.3388	0.9901
1971-1993	0.3421	0.9940
1971-1997	0.3338	0.9939
1971-1999	0.3285	0.9949

Plusieurs constatations s'imposent :

- L'hypothèse d'exponentialité est vérifiée quel que soit l'horizon. Les déterminations sont toutes de l'ordre de 99%.
- Les taux de croissance varient peu. Les progrès semblent donc constants.

Ces considérations valident l'idée d'un modèle descriptif exponentiel. Du moins en partie : l'observation hors norme due à la mise sur le marché des pentium IV doit être prise en compte.

### 3 Modélisation de l'évolution technologique

#### 3.1 Modèle exponentiel déterministe

Les considérations qui précèdent nous amènent évidemment à privilégier la modélisation exponentielle. Cette dernière représente *presque* l'intégralité des observations.

Situons l'origine des temps en 1970 et notons  $M(t)$  la fonction représentant le nombre de MIPS à l'instant  $t$  sur cette échelle des temps. La prise en compte des observations de 1971 à 1999 conduit à la modélisation :

$$M(t) = ae^{bt} = 0.0419e^{0.3285t}$$

Il nous reste à intégrer au modèle les *irrégularités* aléatoires qui peuvent être observées.

#### 3.2 Modèle stochastique

Notre idée consiste à faire l'hypothèse de flux impulsions brusques, dus à de foudroyants progrès technologiques mais se produisant de manière imprévisible. Des modèles de ce type sont courants. Nous en rappelons quelques points essentiels.

Modélisons tout d'abord l'intensité des sauts temporels. Cette dernière est probablement aléatoire. Dans le cas qui nous occupe, on vérifie sans peine que le niveau de 6400 MIPS ne sera atteint par notre modèle qu'après un peu plus de 36 ans (36,34), c'est-à-dire courant 2006. Le saut temporel est donc d'environ 6 ans. Considérons une suite de variables équidistribuées  $g_1, g_2, \dots$  à valeurs dans  $R^+$  et de fonction de répartition  $F$ . Avec ces notations,  $F(c)$  représente la probabilité d'observer un bond technologique inférieur à  $c$  années. Notons

$$m_g = E[g_k] = \int_0^\infty c \, dF(c)$$

Apparemment, ces événements sont rares. On en compte une seule observation ces 35 dernières années.

Modélisons à présent le processus  $N$  décrivant le nombre de sauts sur un intervalle  $[0, t]$ . Pour ce faire, nous optons classiquement pour un processus de Poisson de paramètre  $\lambda$ . Sous cette hypothèse, la probabilité d'observer  $k$  sauts sur l'intervalle  $[0, t]$  est donnée par :

$$p_k = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

On note  $T_k$  le temps d'arrêt correspondant au  $k^e$  saut. Considérons à présent le processus "sauts cumulés"  $H$ . Par définition :

$$H(t, \omega) = \sum_{k|T_k \leq t} g_k(\omega)$$

On vérifie aisément que :

$$E[H(t, \omega)] = m_g \lambda t$$

Avec ces notations, notre processus  $M(t)$  devient :

$$M(t, \omega) = a e^{b[t+H(t)]}$$

Dans le cas qui nous concerne, le modèle prend la forme explicite :

$$M(t, \omega) = \begin{cases} 0.0419 e^{0.3285t} & \text{si } t \leq 30 \\ 0.0419 e^{0.3285(t+6)} & \text{si } t > 30 \end{cases} \quad (1)$$

## 4 Fonction d'obsolescence

Le développement extrêmement rapide de l'informatique n'est pas sans conséquences négatives. Il s'agit d'une dynamique créatrice certes, mais fortement destructrice pour les produits existants. Du fait de ce prodigieux développement, ces derniers subissent une obsolescence extrêmement rapide.

Le Petit Robert<sup>4</sup> définit l'obsolescence comme étant le

*vieillessement technologique de l'équipement industriel, dû à l'apparition d'un matériel nouveau de meilleure qualité ou d'un plus grand rendement*

Pour un matériel acquis à l'instant  $t_0$ , il convient de définir une fonction d'obsolescence  $G(t)$   $t \in [t_0, \infty[$ , strictement croissante telle que  $G(t_0) = 0$  et telle que  $\lim_{t \rightarrow \infty} G(t) = 1$ . Ces hypothèses sont réalistes. On suppose que le matériel acquis est le plus performant au moment de l'achat<sup>5</sup> et que sa dégénérescence sera absolue après un temps infini.

Considérons un matériel acquis à l'instant  $t_0$ . La performance de ce matériel est donc quantifiée par la valeur  $M(t_0)$ . Etant donné notre choix de modélisation exponentielle de la fonction  $M(t)$ , on peut, en respectant nos exigences, définir  $G(t)$ , ( $t > t_0$ ) par :

$$G(t) = \frac{M(t) - M(t_0)}{M(t)}$$

à savoir le défaut de puissance du matériel en place, calculé à l'instant  $t$ , relativement à la puissance optimale à ce moment. Avec notre modélisation, on obtient la forme explicite suivante, intégrant la propriété bien connue de *processus à accroissements stationnaires et indépendants* de  $H(t)$  :

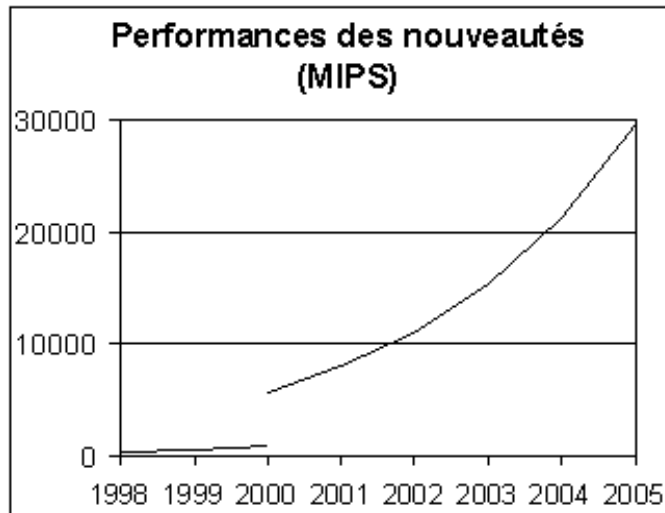
$$G(t) = 1 - e^{-b[(t-t_0)+H(t-t_0)]}$$

<sup>4</sup>Paul Robert, Le Petit Robert 1, Dictionnaire alphabétique et analogique de la langue française, Montréal, 1998, P. 1295 - 1296.

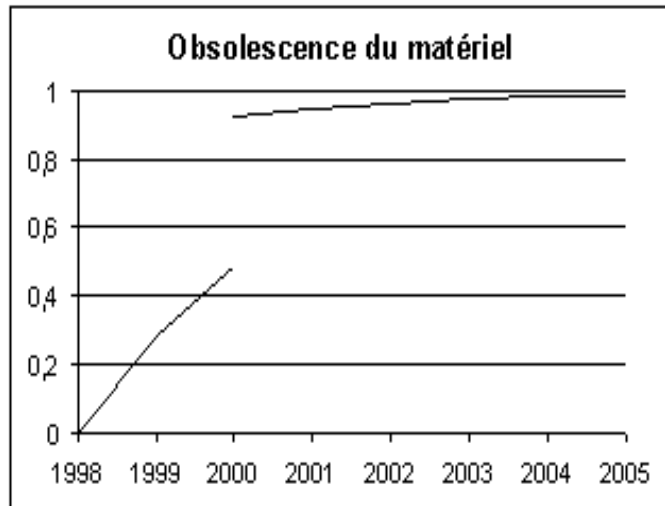
<sup>5</sup>Ce point n'est pas nécessairement vérifié : l'obsolescence du matériel informatique est programmée par les grands producteurs. Une machine n'est mise en vente que s'il est certain qu'une machine plus performante est en cours de production de manière à être sûr du renouvellement du parc.

Les sauts technologiques sont rares puisque le phénomène fut observé une seule fois en 35 ans. Mais quel est l'impact d'un saut de ce type sur le matériel existant ?

A titre d'exemple, considérons le cas d'un matériel acquis en 1998 et subissant le choc de l'introduction des processeurs Pentium IV en 2000. L'évolution des performances des produits neufs suit :



Etablissons l'allure générale de la fonction d'obsolescence de notre matériel acquis en 1998 :



Numériquement, la fonction d'obsolescence suit les valeurs du tableau suivant :

Année	obsolescence
1998	0
1999	0,279997072
2000	0,481595783
2000	0,927777237
2001	0,947999399
2002	0,962559415
2003	0,973042669
2004	0,980590643
2005	0,986025206

Les chiffres sont clairs et l'impact du saut technologique est manifeste : il contraint la presque totalité du marché au remplacement obligatoire de son matériel. En effet, l'accroissement de capacité des ordinateurs va de pair avec l'alourdissement, souvent gratuit au niveau des performances réelles, des logiciels usuels<sup>6</sup>. De plus, l'utilisation par certains acteurs du marché économique des nouvelles versions, construites de manière à être illisibles par les versions antérieures, rend bientôt toute communication impossible.

## 5 Contrats de leasing financier

### 5.1 Considérations générales

Le remplacement du parc informatique peut évidemment se faire sur fonds propres ou en ayant recours à un crédit d'investissement. Toutefois une forme différente de contrat peut être envisagée dans ce cas particulier : le leasing financier. Plusieurs aspects de ce leasing devraient être étudiés. Nous nous limitons aux seuls points techniques utilisant le modèle d'obsolescence<sup>7</sup>.

En droit belge, le leasing est appelé *location financement*. Il s'agit<sup>8</sup> d'une

*technique contractuelle de crédit par laquelle une entreprise de leasing acquiert, sur les instructions spécifiques de son futur preneur (le locataire), la propriété de biens d'équipement - mobiliers ou immobiliers - à usage professionnel, en vue de les donner en location à ce preneur pour une durée déterminée et en contrepartie de redevances ou loyers*

Outre les loyers, les contrats prévoient également un ultime versement non obligatoire représentant théoriquement la valeur résiduelle du bien corporel à

<sup>6</sup>Certains ralentis par boucles.

<sup>7</sup>Le lecteur intéressé par les aspects comptables et notamment l'utilisation des nouvelles normes, peut consulter [4].

<sup>8</sup>Voir [1] p. 422.



l'issue du contrat et permettant au locataire de devenir le propriétaire du bien. On parle ici d'*option d'achat*. Sur le plan juridique, le leasing n'a obtenu de reconnaissance légale qu'en 1967, par l'Arrêté Royal n° 55 du 10/11/1967 qui fait la distinction entre *leasing financier* et *leasing opérationnel*.

Le premier type de leasing traite d'une opération de financement pur d'acquisition d'un bien corporel. Ce contrat doit respecter les conditions formelles imposées par le droit comptable :

- Le capital investi par le bailleur est intégralement reconstitué
- L'option d'achat ne doit pas représenter plus de 15 % du capital investi

Le second type traite d'une opération d'acquisition d'un bien corporel à laquelle s'ajoutent d'autres prestations comme, dans le cas d'un leasing opérationnel de voiture de société par exemple, l'assurance, l'entretien, les réparations, le remplacement.

Au niveau économique, le leasing est généralement une opération tripartite entre un preneur de leasing, un donneur de leasing (bailleur) et un fournisseur. Dans certains cas, le bailleur est aussi le fournisseur.

La durée d'un leasing doit correspondre à la durée de vie économique du bien financé. En général, le leasing mobilier concerne des biens d'une durée de vie de 2 à 5 ans. Par ailleurs, le leasing n'est pas résiliable.

## 5.2 Description technique

Considérons un contrat d'une durée de  $n$  mois. Le loyer mensuel, qui peut être payé anticipativement ou à terme échu, est généralement calculé à partir d'un *barème locatif* selon la relation<sup>9</sup> :

$$\text{Loyer périodique} = L = \text{capital} \times \text{barème locatif}$$

De plus, une option d'achat  $OA$  est prévue à l'issue du contrat. Sur base de quel taux d'intérêt se fait alors la transaction ?

Le problème n'est pas une simple question d'algèbre financière étant donné la présence de l'option d'achat. Si à l'issue du contrat le matériel leasé est d'une obsolescence proche de 1, il est probable que l'entreprise n'optera pas pour son acquisition. C'est le cas lorsqu'une ou plusieurs avancées technologiques se sont présentées en cours de contrat. Dans le cas contraire, l'option sera effectivement exercée et cet ultime versement constituera un flux financier supplémentaire dont il devra être tenu compte. On le constate, la présence de l'option modifie singulièrement le problème et l'arsenal des modèles financiers sophistiqués en matière de produits dérivés<sup>10</sup> ne s'applique pas directement à ce cas, le *spus-jacent* ne pouvant raisonnablement être modélisé par un brownien géométrique.

<sup>9</sup>Il n'est pas ici question de taux d'intérêt.

<sup>10</sup>Pour une description abordable de ces produits, le lecteur peut consulter [5] ou [8].

Situons nous dans le cas des paiements anticipés (premier loyer à la signature du contrat). Notons  $V$  la valeur du bien mis en leasing. En cas d'exercice de l'option, l'équation à résoudre est :

$$V = \frac{L}{i} [1 - (1+i)^{-n}] (1+i) + \frac{OA}{(1+i)^n} \quad (2)$$

Dans le cas contraire on a évidemment :

$$V = \frac{L}{i} [1 - (1+i)^{-n}] (1+i) \quad (3)$$

Le taux solution de (2) est évidemment strictement supérieur au taux solution de (3). Aucun des taux intermédiaires n'a de sens. On se retrouve donc dans le cas d'une distribution de taux à deux modalités. Cette distribution est probabilisable sous les hypothèses que nous avons développées plus haut dans le modèle d'obsolescence.

Notons  $t_0$  l'instant d'acquisition du matériel,  $t_1$  l'instant de fin du contrat<sup>11</sup> exprimés en années et  $\frac{OA}{V}$  la valeur relative de l'option par rapport à la valeur du bien leasé. L'option est exercée lorsque la valeur résiduelle réelle du matériel leasé a une valeur supérieure à l'option ou encore lorsque son obsolescence est strictement inférieure à "1 - la valeur relative de l'option". Mathématiquement, on note :

$$G(t_1) = 1 - e^{-b[(t_1-t_0)+H(t_1-t_0)]} < 1 - \frac{OA}{V} \quad (4)$$

c'est-à-dire en se rappelant que le processus  $H(t, \omega)$  est à accroissements stationnaires et indépendants :

$$\frac{M(t_0)}{M(t_1)} > \frac{OA}{V}$$

Dans le cas contraire, l'option n'est pas exercée. Un exemple numérique va nous permettre de quantifier la probabilisation sous-jacente.

Avant de procéder aux calculs, signalons encore qu'on peut ou non tenir compte de la TVA (21 %). L'équation *TVA comprise* est tout simplement équivalente à l'équation *hors TVA* multipliée par 1.21.

### 5.3 Résolution d'un exemple

Nous proposons un cas réel<sup>12</sup> proposé par une grande banque belge. Nous avons choisi de travailler hors TVA, ce qui ne restreint pas la généralité du propos.

#### 5.3.1 Présentation du contrat

Nous traitons le cas d'un contrat de leasing pour remplacement de matériel informatique d'une valeur de 30 000 euros. La périodicité est mensuelle, la durée

<sup>11</sup>La durée du contrat est alors égale à  $t_1 - t_0$ .

<sup>12</sup>Proposition datée du 28 juillet 2005.

de 24 mois et le loyer mensuel, dû dès réception du matériel, est exactement de 1 318.76 euros. L'option d'achat est égale à 1 % de la valeur du bien matériel, soit 300 euros.

Le contrat ne mentionne pas de TAEG.

### 5.3.2 Mise en équation du contrat

Nous travaillons avec deux mises en équation prenant en compte le cas d'exercice ou non de l'option. Avec option d'achat, il convient de résoudre :

$$30000 = \frac{1318.76}{i} [1 - (1+i)^{-24}] (1+i) + 300(1+i)^{-24}$$

Pour ce faire, nous utilisons la méthode de Jaumain<sup>13</sup> pour laquelle nous avons donné, en collaboration avec le professeur Bair de l'Université de Liège, une démonstration de convergence<sup>14</sup>.

La convergence de la méthode de Jaumain est rapide et l'on obtient un taux mensuel égal à 0.00549979 correspondant à un TAEG<sup>15</sup> de 0.06803. Le lecteur désireux d'obtenir un fichier de calcul par la méthode de Jaumain peut nous contacter à l'adresse indiquée en début d'article.

Sans option, on résoud

$$30000 = \frac{1318.76}{i} [1 - (1+i)^{-24}] (1+i)$$

et le taux mensuel tombe à 0.00471352, correspondant à un TAEG de 0.05805. On le constate, les deux taux sont significativement différents.

Les tableaux d'amortissements fournis par l'organisme financier sont calculés sans option, tout en donnant un solde restant dû nul ! Alors reste la question : cette option a-t-elle beaucoup de chances d'être exercée ?

### 5.3.3 Probabilisation

Pour un contrat de deux ans, correspondant à un achat effectué en  $t_0$ , notre modèle d'obsolescence donne :

$$G(t) = 1 - e^{-0.3285[(2)+H(2)]}$$

Considérons une fréquence moyenne annuelle d'apparition de percée technologique  $\lambda = 0.04$  correspondant à un progrès considérable tous les 25 ans en moyenne. Pour mémoire, nous n'avons observé qu'une seule percée en 35 ans. Notre hypothèse est donc relativement optimiste.

<sup>13</sup>Voir [9].

<sup>14</sup>Pour un descriptif de la méthode et la démonstration de la convergence, Voir [2] et [3].

<sup>15</sup>Pour mémoire, le Taux Annuel Effectif Global se calcule à partir du taux mensuel  $i_m$  par :  $TAEG = (1 + i_m)^{12} - 1$ .

Calculons les probabilités associées aux événements successifs “pas de saut en deux ans”, “un saut en deux ans”, “deux sauts en deux ans”, “plus de deux sauts en deux ans” et calculons pour chacun de ces événements l’obsolescence correspondante en tablant sur des sauts temporels de 5 ans (encore une fois notre hypothèse est optimiste, le seul saut observé étant de plus de 6 ans).

On obtient le tableau de valeurs :

Nombre de sauts	probabilité	obsolescence
Pas de saut	0.92312	0.48160
1 saut	0.07385	0.89969
2 sauts	0.00295	0.98059
plus de 2	0.00008	> 0.99624

L’option d’achat représentant 1 % de la valeur du bien matériel, cette dernière sera exercée pour toute obsolescence strictement inférieure à 99 %. On constate que c’est le cas avec probabilité 0.99992. Pour que l’option ne soit pas exercée, il faut observer au moins trois sauts technologiques en moins de 2 ans ce qui est évidemment très peu probable. La conclusion est claire. L’option sera presque toujours<sup>16</sup> exercée et le taux réel du contrat est le taux le plus élevé.

## 6 Conclusions

La législation belge prévoit que tout contrat d’emprunt<sup>17</sup> doit mentionner le Taux Annuel Effectif Global (TAEG) associé à l’ensemble des flux financiers positifs ou négatifs intervenant dans le contrat. Les calculs proposés par le législateur sont très largement inspirés des travaux de Christian Jaumain<sup>18</sup> que nous avons utilisés plus haut. On ne peut que se réjouir de ce que la loi impose des calculs corrects aux institutions financières ce qui n’était pas le cas avant 1992.

Il semble malheureusement que le leasing financier échappe à cette obligation; les contrats mentionnent uniquement un barème locatif qui est à mettre en parallèle avec l’ancienne notion de taux de chargement et qui n’a pas de signification objective pour le client. La présence de l’option d’achat ne permet évidemment pas de calculs déterministes, cette dernière pouvant ou non être exercée. Mais les organismes financiers proposent des options d’achat tellement basses que la probabilité de ne pas les exercer tend uniformément vers zéro. Une façon comme une autre d’augmenter sournoisement le coût du crédit.

<sup>16</sup>Etant donné les valeurs numériques du tableau, on peut *presque* donner à cette expression sa signification probabiliste.

<sup>17</sup>Moniteur belge du 8 septembre 1992 (pages 19 525 à 19 544).

<sup>18</sup>Voir [9].

## References

- [1] ANTOINE, J. - DEHAN-MAROYE, R.M. - DENDAUW, C. : *Traité de comptabilisation*, Editions De Boeck Université, 1ère édition, Bruxelles.
- [2] BAIR, J. - JUSTENS, D. (1996) : Propriétés de moyennes pondérées de puissances et applications financières, *Publication GEMME 9623*, Ulg.
- [3] BAIR, J. - HAESBROECK, G - JUSTENS, D - ROSOUX, J. (1998) : *Modèles mathématiques en finance : de l'incohérence à l'incertitude ou au chaos*, Presses Ferrer Publication de la haute École Francisco Ferrer, Bruxelles.
- [4] BIHOYIKI, Christian (2005) : *Le leasing, une solution efficace pour financer les actifs à obsolescence rapide : cas du matériel informatique*, Mémoire présenté en vue de l'obtention du grade de licencié en sciences commerciales et financières; Haute Ecole Francisco Ferrer.
- [5] DEVOLDER, P. (1993) : *Finance stochastique*, Bruxelles, Editions de l'Université de Bruxelles, Collection actuariat.
- [6] DROESBEKE, J.-J. - FELTEN, M. - HAESBROECK, G. - JUSTENS, D. - PREUMONT P.Y. (2002) : *Utilisation de la statistique en finance et en gestion : applications de résultats récents et de techniques nouvelles*, Presses Ferrer, Place Anneessens, 11, 1000 Bruxelles.
- [7] DUBOIS, P (2005) : *Cinq générations d'ordinateurs*, <http://mo5.comMHI/Histoire/histoire.php>.
- [8] ESCH, L. - JUSTENS D. - MOEREMANS, G. - GEUSKENS, N. (2001) : *Modélisation de produits financiers à risque réduit : obligations, sicav, options, swaps et swaptions*. Édition Presses Ferrer, Place Anneessens, 11, 1000 Bruxelles.
- [9] JAUMAIN, C. (1979) : Calcul du taux d'intérêt réel d'une opération financière, *Mitteilungen der Vereinigung schweiz. versicherungsmathematiker*, Heft 2, pp. 137-146.
- [10] RUSSO, R (1998) : *Livre Vert sur la Convergence*, Réponse de Bouygues Telecom et 9 Telecom au questionnaire de la Commission européenne.