# Regroupements d'emprunts et remboursements prolongés : entre législation et mathématiques

*Daniel Justens*

*Le surendettement est une réalité pour un nombre croissant de ménages. Une des solutions proposées pour remédier à cette situation est le regroupement des crédits, assorti d'une allongement de la période de remboursement. On peut calculer le surcoût réel pour les ménages de ce genre de proposition et il est loin d'être négligeable.*

## Un peu de mathématique financière

Voyons comment évolue un capital $C$ placé pendant plusieurs années dans le même organisme financier. La banque procède tous les ans à un calcul d'intérêts qui sont ajoutés au capital, procédant ainsi à une recapitalisation. Ces intérêts sont calculés proportionnellement au capital et à la durée et ce coefficient de proportionnalité est mieux connu sous la notion de « taux d'intérêt ». En faisant l'hypothèse d'un taux annuel constant, on arrive, années après années à la suite $C$, $C(1)= C +Ci = C(1+i)$, $C(2)=C(1)(1+i)=C(1+i)^2$, $C(3)=C(2)(1+i)=C(1+i)^3$, ... ,$C(n) = C(1+i)^n$. Cette expression montre que le processus d'évolution d'un capital est de type multiplicatif et doit se modéliser au moyen d'une exponentielle. Le domaine de la relation construite est l'ensemble des naturels mais son extension à l'ensemble des réels (en ce compris les négatifs) offre une représentation exponentielle qui allie simplicité et cohérence, à savoir :

$$C(t) = C(1+i)^t.$$

La modélisation exponentielle est confortée par un raisonnement déductif qui ne repose que sur deux postulats : la dérivabilité de $C(t)$ et la proportionnalité des variations instantanées de capital au capital lui-même, en introduisant cette fois un coefficient de proportionnalité noté $r$. Ceci est intuitif : le placement d'un capital deux fois plus grand doit rapporter deux fois plus. Sous ces hypothèses, la solution à l'équation différentielle qui en résulte n'admet qu'une seule solution :

$$C(t)=C\,e^{rt},$$

expression dans laquelle $r$ s'interprète comme « taux instantané d'intérêt » (spot rate). On a évidemment : $(1+i)=e^r$. Le raisonnement qui précède permet de travailler avec des taux variables et même aléatoires, ce qui ouvre les portes à une représentation plus réaliste. Mais l'extension au modèle à l'ensemble des réels permet surtout d'évaluer la valeur aujourd'hui (actualisation) de capitaux échéant dans le futur. On peut sur cette base construire l'équation d'équilibre de tout contrat d'emprunt en optant pour le principe de l'égalité des flux financiers opposés actualisés. Soit un emprunt de montant $V$ remboursé par $n$ mensualités $a$. Notons $i$ le taux d'intérêt mensuel utilisé. L'équation qui équilibre $V$ et la succession de $n$ versements $a$ échelonnés est :

$$V = a(1+i)^{-1} + a(1+i)^{-2} + a(1+i)^{-3} + ... + a(1+i)^{-n}$$

On retrouve ici la somme de $n$ termes en suite géométrique de raison $(1+i)^{-1}$. En calculant cette somme, on arrive après quelques manipulations algébriques à :

$$V=\frac{a}{i}\left(1-\left(1+i\right)^{n}\right)$$

La variable $i$ ne doit pas être considérée uniquement comme une mesure de la charge financière : elle peut aussi être vue comme un indice synthétique de coût caractérisant le contrat. Cette façon de voir est fondamentale : elle permet la comparaison entre plusieurs contrats différents de durées différentes. Connaissant $V$, $n$ et $i$, il est aisé de calculer $a$. On peut donc noter tout contrat sous la forme $a(V, n, i)$. On remarque que le calcul de $i$ à partir de $V$, $n$ et $a$ est nettement plus délicat. Il a donné lieu à des résultats intéressants concernant notamment les moyennes pondérées de suites géométriques.

**Existence et unicité d'un taux d'équilibre**

En posant $na>V$, ce qui est évident économiquement, la somme des remboursements étant toujours supérieure au montant emprunté, on montre l'existence et l'unicité d'un taux $i$ strictement positif vérifiant l'équation d'équilibre. Il suffit pour cela de considérer la fonction

$$f(i) = a(1+i)^{-1} + a(1+i)^{-2} + a(1+i)^{-3} + ... + a(1+i)^{-n}$$

sur l'ensemble des réels positifs, de vérifier que cette fonction est de dérivée première strictement négative (la fonction est donc décroissante), de limite en l'infini nulle et, qu'étant continue, elle passe une et une seule fois par toutes les valeurs de l'intervalle $[na, 0[$. Lorsque le taux est nul, on vérifie en effet que $f(0) = na > V$. La fonction $f(i)$ prend donc une et une seule fois la valeur $V$ lorsque $i$ parcourt l'intervalle $[0, +\infty[$. Et on a $i = f^{-1}(V)$.

**Les regroupements de crédit et la législation**

Il y a généralement un lien entre la durée du contrat et le montant emprunté : si l'on emprunte plus, il faut rembourser plus et surtout ... plus longtemps. Certaines personnes ont recours régulièrement à de petits crédits pour de petits achats (comme des électroménagers), qui sont chacun conclus à court terme (24 ou 36 mois) et assortis individuellement de petits remboursements. Mais l'accumulation de ces petits contrats, auxquels s'ajoute éventuellement un financement auto et un loyer, en vient à grever sérieusement les revenus mensuels disponibles du ménage. Certains organismes financiers proposent alors le regroupement de ces petits crédits en un seul contracté à de nouvelles conditions. Le principal argument en faveur du rachat de crédits est la diminution de la mensualité, et, par conséquence du taux apparent d'endettement du ménage, augmentant la part de salaire libéré chaque mois pour les dépenses courantes ... mais accroissant également significativement la durée de l'endettement.

Avant la loi « Lagarde » (2 juillet 2010 : arrêtés d'applications parus entre le 1^er^ septembre 2010 et le 1^er^ avril 2011) certaines publicités avançaient sans complexe des affirmations du style « Diminuez vos mensualités jusqu'à 60% » sans préciser en rien quelles étaient les contreparties attendues par l'organisme financier. En application de l'article L311-5 du code de la consommation, il est désormais interdit, dans toute publicité de « laisser entendre que le prêt améliore la situation financière ou le budget de l'emprunteur, entraîne une augmentation de ressources, constitue un substitut d'épargne ». Depuis, La loi Hamon (adoptée par le Parlement en février 2014) a précisé que « lorsqu'une publicité compare le montant des échéances d'un ou plusieurs crédits antérieurs, et le cas échéant d'autres dettes, à celui d'une échéance résultant d'une opération de regroupement de crédits, elle mentionne de manière claire et apparente, d'une part, la somme des coûts totaux des crédits antérieurs et, d'autre part, le coût total du crédit postérieur à l'opération précitée ».

**Les regroupements de crédit et les maths**

Voyons comment se comportent les choses mathématiquement et comment on peut regrouper deux contrats $a_1(V_1, n_1, i_1)$ et $a_2(V_2, n_2, i_2)$ en un troisième $a_3(V_3, n_3, i_3)$. Le but est évidemment d'obtenir un remboursement regroupé $a_3$ significativement inférieur à $a_1 + a_2$. On doit avoir $V_3>V_1+V_2$ afin de couvrir au moins les montant des deux emprunts augmentés des frais de dossier consécutifs à l'opération de regroupement, ce qui débouche inéluctablement sur $n_3>\max(n_1, n_2)$. Quant au nouveau taux d'intérêt, $i_3$, rien ne permet d'affirmer qu'il ne sera pas strictement supérieur au max($i_1$, $i_2$). Lors d'un regroupement, la loi stipule que lorsque celui-ci comprend un ou des crédits immobiliers dont la part relative ne dépasse pas 60%, le nouveau contrat de crédit relève des dispositions sur les crédits à la consommation. Lorsque la part des crédits immobiliers est supérieure ou égale à 60%, c'est la législation sur les prêts immobiliers qui s'applique. Et le consommateur doit le savoir : les ordres de grandeur des taux sur ces deux types de contrat sont fort différents.

Les taux dépendent aussi de la durée du contrat : tel organisme demandera par exemple un taux annuel de 0,06 pour des durées comprises entre 1 et 10 ans, taux qui passera à 0,062 pour des contrats de durées comprises entre 11 et 15 ans. Attention, les taux dont on parle ici sont des taux annuels. Alors que les remboursements sont généralement mensuels ! Le législateur, obéissant en cela aux prescriptions européennes (Directive 90/88/CEE du 22 février 1990), impose que le calcul du taux annuel se fasse sur base de la notion de taux équivalents (et non proportionnels). C'est la notion de TAEG en Belgique ou de TEG en France, acronymes de Taux (Annuel) Effectif Global. Soit un taux annuel $i$ et un taux mensuel $i_m$ dit « équivalents », c'est-à-dire donnant mêmes valeurs acquises pour un placement de même durée. Pour une durée de $t$ années, on compte évidemment $12t$ mois en moyenne. Attention : le mois n'est pas une unité de temps cohérente, fluctuant entre 28 et 31 jours, et présentant ainsi une variabilité de l'ordre de 10%. L'égalité des valeurs acquises donne :

$$C(1+i)^t = C(1+i_m)^{12t}$$

ou encore :

$$i=(1+i_m)^{12}-1 \quad soit \quad i_m=\sqrt[12]{1+i}-1$$

Dans tous les cas, les opérations de rachat de crédits seront particulièrement rentables pour les organismes de financement qui les proposent ainsi que pour les courtiers dont la commission perçue est nettement supérieure sur les opérations de rachat de crédit que sur un crédit immobilier classique, et cela pour un montant d'emprunt identique. De plus, les taux de crédit proposés lors d'une opération de rachat peuvent varier de 1 point à plus de 3 « points » (pour-cents) en plus d'un taux de référence, et cela selon le profil de l'emprunteur.

**Un exemple numérique**

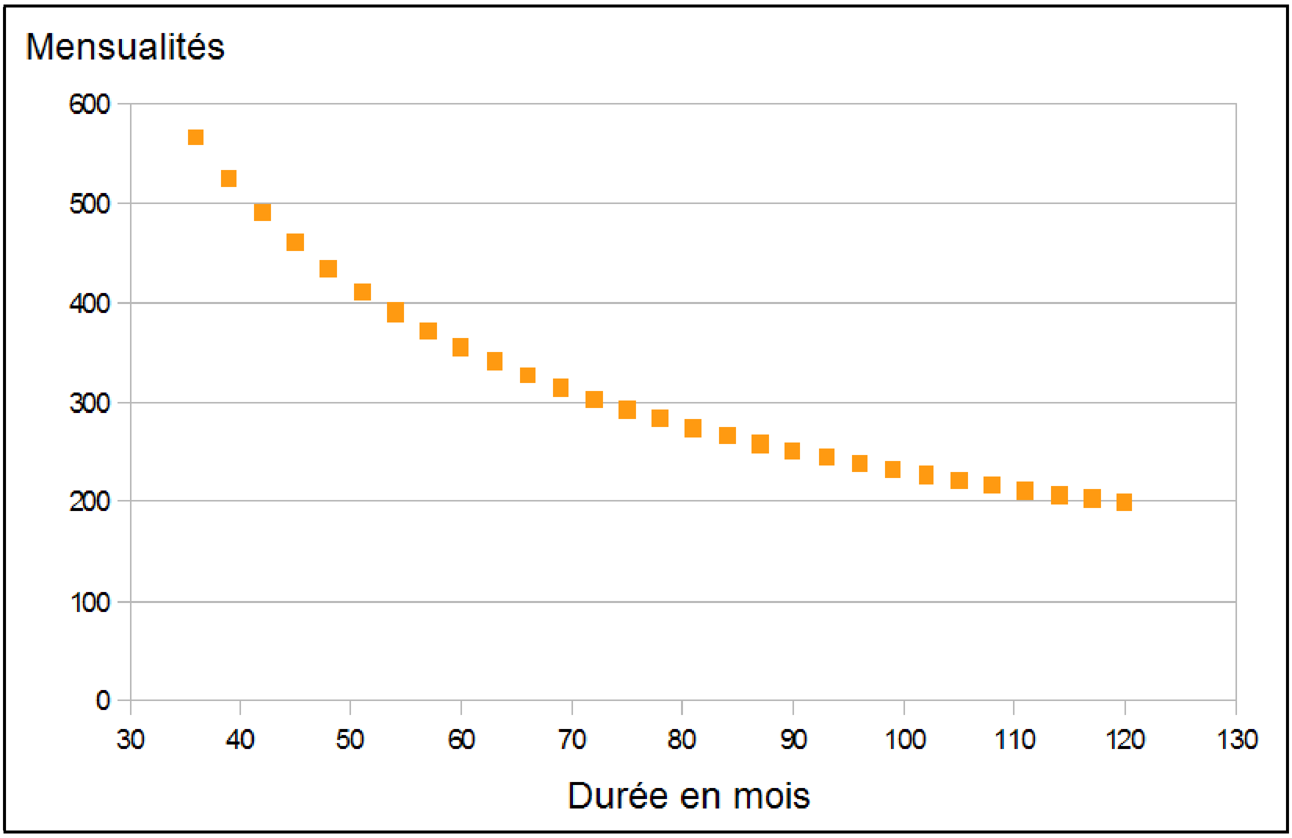
Un exemple va permettre de mieux illustrer les choses. Envisageons le cas d'une famille ayant acheté une voiture à crédit sur 36 mois, soit un emprunt de 12 000 euro, au TEG de 5%. Le taux mensuel équivalent à ces 5% est ici :

$$i_m=\sqrt[12]{1{,}05}-1=0{,}004074124$$

On en tire la mensualité :

$$a=\frac{12000\times i_m}{1-(1+i_m)^{-36}}=359{,}05$$

Notre même ménage a également fait procéder au placement d'une cuisine au coût raisonnable de 6000 euro remboursables en 24 mois aux taux exceptionnellement avantageux de 4%. Le taux mensuel associé est 0,00327374 et la mensualité se chiffre à 260,36 euro. Voici notre ménage contraint de rembourser 619,41 euro par mois en plus du loyer. En regroupant les deux contrats (frais et commissionnement : 5% du montant pris en considération), notre ménage doit conclure un nouvel emprunt pour un montant de 18 900 euro. Pour un TEG de 5%, valable pour des durées de 3 à 10 ans, la fonction « remboursement » (dont le domaine est l'ensemble des naturels) prend la forme :




L'asymptote horizontale de cette fonction est intéressante en ce sens qu'elle représente le remboursement mensuel minimum associé à une durée de remboursement infiniment longue. Dans le cas de notre exemple, cette valeur correspond en fait à la charge financière mensuelle sans amortissement soit $V.i_m$ = 77 euro. Dans la réalité objective d'un temps fini, pour arriver à un remboursement de l'ordre de 80 euro par mois, il faut emprunter sur plus de 60 ans ce qui est totalement absurde, montrant ainsi les limites des comportements extrêmes. Mais on constate aussi, et c'est là une interprétation particulièrement intéressante de la notion d'asymptote horizontale, que la diminution de remboursement s'atténue régulièrement lorsque $n$ croît, jusqu'à devenir non significative.

Le passage de 3 à 4 ans fait « économiser » (si l'on peut dire ...) 131 euro par mois à notre ménage alors que l'allongement de 4 à 5 ans ne lui octroie plus que 78 euro de plus par mois pour ses dépenses courantes. Il faut donc faire un compromis entre allongement de la durée du crédit et diminution du taux d'endettement (montant de la charge fixe, loyer compris, divisé par le salaire mensuel net – impôts déduis). Mathématiquement, tous les contrats $a_3$ de durées comprises entre 3 et 10 ans ont même valeur actuelle, à savoir 18.900 euro. On peut calculer, au même taux d'actualisation équivalent à 5% annuels, la valeur actuelle de la somme des deux contrats initiaux :

$$\frac{359{,}05}{i_m}\times\left(1-(1+i_m)^{-36}\right)+\frac{260{,}36}{i_m}\times\left(1-(1+i_m)^{-24}\right)=17941{,}32$$

En euro constants, le regroupement des deux crédits coutera donc près de 1000 euro à notre ménage surendetté. C'est très loin d'être négligeable. Et mérite réflexion avant de se lancer inconsidérément dans des achats non indispensables.