L'intégrale de Stieltjes :
un outil idéal pour la modélisation en théorie de la décision d'investissement
Daniel Justens

L'intégrale de Stieltjes, tout comme celle de Lebesgue ou celle de Itô, est une extension de l'intégrale de Riemann. Pour intégrer la fonction $f(x)$ selon Riemann sur un intervalle réel $[a, b]$, on commence par introduire une subdivision de l'intervalle de définition de la variable : $x_0=a < x_1 < ... < x_i < ... < x_n=b$. Dans chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}[$, on considère un point intermédiaire x_i^α. On approche la fonction $f(x)$ par la fonction en escalier $f_n(x)$, en lui donnant la valeur $f(x_i^\alpha)$ dans tout point de l'intervalle $[x_i, x_{i+1}[$. On définit l'intégrale de la fonction approchée par :

$$\int_a^b f_n(x)\,dx=\sum_{i=1}^n f(x_i^\alpha)(x_i-x_{i-1})$$

L'intégrale de Riemann s'obtient en prenant la limite de la suite obtenue (si cette limite existe) lorsque le nombre d'intervalles n tend vers l'infini, en veillant à ce que la norme ν de la subdivision (longueur du plus grand intervalle) tende vers 0. Formellement :

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n f(x_i^\alpha)(x_i-x_{i-1})$$

Le passage à l'intégrale de Stieltjes se fait par l'introduction d'une fonction de comptage $g(x)$. Au lieu de sommer les valeurs de la fonction $f(x)$ proportionnellement aux variations de la variable x, comme on le fait pour l'intégrale de Riemann, on les somme proportionnellement aux variations de la fonction $g(x)$ sur les mêmes intervalles. Formellement, on a successivement :

$$\int_a^b f_n(x)\,dg=\sum_{i=1}^n f(x_i^\alpha)[g(x_i)-g(x_{i-1})]$$

$$\int_a^b f(x)\,dg=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n f(x_i^\alpha)[g(x_i)-g(x_{i-1})]$$

Cette modification n'est pas que formelle : elle s'avère étonnamment fertile en applications concrètes. Nous en donnons un exemple.

Une application en théorie de la décision d'investissement

Construisons un modèle continu devant représenter l'activité économique d'une entreprise. Dans ce contexte, la variable est le temps et se note t. Plutôt que de considérer individuellement chaque flux financier positif ou négatif traduisant chacune des activités de l'entreprise, on préfère opter pour l'utilisation d'une fonction densité de flux $f(t)$. En effet, la multiplication des activités rend toute présentation discrète réaliste beaucoup trop complexe. D'autre part, la considération de flux regroupés tous les mois ou tous les ans (bilans) ne rend pas fidèlement compte de la réalité.

Par définition, une fonction densité de flux $f(t)$ rend compte des activités de l'entreprise sur l'intervalle $[a,b]$ si et seulement si pour tout intervalle $[\alpha,\beta]$ inclus à $[a,b]$, l'intégrale de Riemann $\int_\alpha^\beta f(t)\,dt$ représente le solde des flux positifs et négatifs enregistrés par l'entreprise sur cet intervalle de temps. Considérons le cas particulier où α représente le présent ($\alpha=0$), et où β représente un instant variable t du futur : $\beta=t$. Sous certaines conditions d'intégrabilité (f à variations bornées par exemple), on peut définir une fonction flux cumulé $A(t)$ qui reprend l'évolution progressive du compte résultats de l'entreprise :

$$A(t)=\int_0^t f(s)\,ds$$

Remarquons que cette façon de faire permet de représenter le solde de toute activité économique durant un intervalle $[\alpha, \beta]$ par $[A(\beta) - A(\alpha)]$. Mais cette façon de faire n'est pas totalement réaliste à long terme. En effet, les résultats différés ne peuvent être pris en compte pour la totalité de leur valeur. Ils subissent les effets du marché de l'argent et de l'inflation : bref, ils doivent être actualisés. En temps continu, les flux futurs sont généralement tempérés par une fonction d'utilité de type exponentielle négative. Un flux financier C échéant à l'instant t a une valeur actuelle (ou présente) égale à $C \times e^{-rt}$. Dans cette expression, r représente le taux de dépréciation ou taux d'actualisation des flux financiers futurs. Ce taux r n'est pas nécessairement identique au taux d'intérêt du marché ou au taux d'inflation : il prend également en compte l'activité spécifique du secteur d'activité économique. Il intègre également la notion de risque.

On peut à présent définir une fonction valeur actuelle des flux financiers futurs $V(t)$. Reprenons notre subdivision de départ : $t_0=0 < t_1 < ... < t_i < ... < t_n=t$. Supposons n suffisamment grand et les intervalles de temps suffisamment petits pour que la fonction d'actualisation ne varie pas significativement durant cet intervalle. Avec ces conventions, notre fonction $V(t)$ peut être approchée par :

$$V(t)=\sum_{i=1}^{n} e^{-rt_i}\left[A(t_i)-A(t_{i-1})\right]$$

On somme les valeurs actuelles des activités futures de l'entreprise sur la succession d'intervalles pris en considération. Après passage à la limite, on constate que la fonction « valeur actuelle » $V(t)$ de l'activité économique coïncide avec l'intégrale de Stieltjes du processus d'actualisation relativement à la fonction flux cumulés $A(t)$. On a donc pour un processus d'actualisation quelconque, dépendant du temps et éventuellement à taux variable $r(t)$, noté $\varphi(t,r(t))$:

$$V(t)=\int_0^t \varphi(s, r(s))\,dA(s)$$

Lorsque la fonction densité de flux financier $f(t)$ est à variation bornée sur l'intervalle de définition, on peut calculer explicitement :

$$V(t)=\int_0^t \varphi(s, r(s))\, f(s)\,ds$$

Voyons ce que donne cela dans le cas particulier d'une activité économique stable de densité constante $f(t) = a$ pour tout t. On vérifie que la fonction flux cumulé s'identifie à une relation affine $A(t) = at$. Pour une fonction d'actualisation usuelle, de type exponentielle négative, la valeur actuelle nette des activités de l'entreprise devient :

$$V(t)=\int_0^t e^{-rs}\,d(as)=a\int_0^t e^{-rs}\,ds=\frac{a}{r}\left[1-e^{-rt}\right]$$

Cette expression généralise en temps continu la formule classique dite des annuités constantes en mathématiques financières (valeur actuelle de succession de flux égaux équidistants dans le temps) tout en se différenciant de cette dernière. En effet, la relation que nous venons d'établir tient compte de l'aspect continu et permanent des activités, alors que la formule des annuités constantes diffère une partie de ces activités pour les regrouper en fin de période. L'intégrale de Stieltjes est plus générale en ce sens qu'elle permet de travailler sur des intervalles de durée quelconque. Elle est plus réaliste puisqu'elle prend en compte les flux positifs et négatifs au moment exact de leur échéance.

Encadré

Le mathématicien néerlandais Thomas Joannes Stieltjes (1856 – 1894) est issu de l'université de Leiden (ville universitaire des Pays-Bas, célèbre pour ses canaux, que les Français orthographient Leyde) ; il décida vers l'âge de 30 ans d'opter pour la nationalité française et acheva sa trop brève existence comme professeur à l'université de Toulouse. Ses travaux couvrent de nombreux domaines allant des méthodes de quadrature de Gauss permettant le calcul numérique d'intégrales définies, aux polynômes orthogonaux en passant par les fractions continues, domaine dans lequel il offrit aux *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse* un article majeur sous le titre *Recherches sur les fractions continues* (1894). C'est dans ce même article qu'il introduisit l'intégrale qui porte son nom. Mais les travaux de Stieltjes ont aussi contribué de façon significative à la création des espaces de Hilbert, à l'étude des séries divergentes et des fonctions discontinues. Il travailla également sur les équations différentielles partielles, la fonction gamma, les fonctions elliptiques. Bien malheureusement, sa santé fragile ne lui permit pas de mener l'ensemble de ses travaux à leur fin.