Un événement stochastiquement impossible est-il vraiment impossible?
Si c'était le cas, vous ne seriez pas là !
Daniel Justens

Lorsqu'il se retrouve face à l'impossibilité de donner une réponse quantifiée et exacte à toute une gamme de problèmes, notre esprit se refuse à accepter cet *inconnu total*. Pas question de se refuser le pouvoir de donner au moins un début de réponse à un problème qui apparemment n'en possède pas dans le champ mathématique. C'est la raison qui fut sans doute à la base de la construction progressive du calcul des probabilités. Ce dernier a remplacé l'*inconnu* ou l'*impossible* par un *connu* mâtiné de *probable* qu'il a fallu axiomatiser. Au lieu de répondre $x = a$ (ou $x \in$ à un certain ensemble A de cardinal fini ou non, bien déterminé, inclus à $\mathfrak{R}$) à une question, nous avons mis en place un système nous autorisant à répondre $x \in [b_i, b_s]$ (bornes ouvertes ou fermées selon le type de problème) avec une certaine probabilité *p,* que l'on pourrait traduire dans le langage courant par *fiabilité*). Celle-ci est généralement proche de 1, tout en demeurant dans tous les cas strictement inférieure à 1. Une réponse sûre est remplacée par une réponse appartenant *probablement* à une certaine fourchette. C'est mieux que rien.

Le calcul des probabilités a mis en place un système de formatage des possibles pour lesquels on dispose d'une certaine information (c'est la notion de σ-algèbre). Il leur associe des probabilités selon certaines règles (axiomatique de Kolmogorov), quantifiant ainsi théoriquement les fréquences de réalisation de certaines réponses ou ensembles de réponses (les *événements*) à nos questions.

On associe alors parfois une probabilité égale à 0 à certaines réponses ou ensembles de réponses. Ces (ensembles de) réponses, sont alors qualifiés de *stochastiquement impossibles*, dont la traduction est rigoureusement équivalente à « de probabilité nulle ». Ces événements sont-ils vraiment « impossibles » au sens courant du terme ? En fait non ! Des événements de probabilité nulle, nous en vivons tous les jours sans nous en rendre compte. Expliquons cette apparente contradiction.

Elle trouve sa source dans la différence qu'il faut faire entre variable discrète et variable continue. Définissons une variable comme la simple mesure numérique d'un phénomène (ce qui est restrictif mais pas trop).

Prenons par exemple le nombre d'accidents de voiture dont vous serez la victime (ou le responsable) cette année. Cette variable ne peut prendre qu'un nombre fini et en général très petit - bien heureusement - de valeurs. C'est une variable dite « discrète ». Pour probabiliser une variable discrète de ce type, il suffit d'associer à chaque mesure possible une certaine probabilité en respectant quelques règles évidentes qui sont précisées dans l'axiomatique de Kolmogorov.

En gros, sans commettre trop de manque de rigueur, ces probabilités doivent être positives ou nulles et la somme de toutes ces probabilités doit valoir exactement 1 (pour couvrir tous les possibles). On peut également associer des probabilités à des ensembles de mesures en sommant les probabilités associées à chacune des mesures de l'ensemble.

La chose est beaucoup plus difficile dans le domaine du continu. Mesurons à présent, par exemple, la durée du trajet allant de votre domicile à votre bureau. Cette durée varie évidemment chaque jour en fonction d'un grand nombre de variables « explicatives » sur lesquelles vous n'avez que peu d'action. Néanmoins, pour gérer votre quotidien, vous devez répondre à la question: quelle est la durée de ce trajet ? Supposons que cette variable puisse prendre toutes les valeurs possibles comprises entre 15 minutes et 1 heure, en fonction de la circulation ou des retards des transports en commun. C'est une hypothèse raisonnable. Il faut transformer nos mesures en secondes pour éviter les pièges liés à la non décimalité du système horaire. La variable « durée » peut alors prendre toutes les valeurs entre 900 et 3600, certaines valeurs étant généralement plus probables que d'autres.

Cette mesure peut être effectuée avec tous les niveaux de précision exigé, au dixième, au centième, au millième de seconde près. Ou plus précisément encore. Le nombre de valeurs possibles devient alors, à la limite, théoriquement infini. Et il n'est plus possible de procéder comme dans le cas discret. En fait, la probabilité associée à chaque valeur « durée » devient forcément de plus en plus petite, à mesure que la précision de la mesure augmente, jusqu'à devenir quasi nulle à la limite du mesurable.

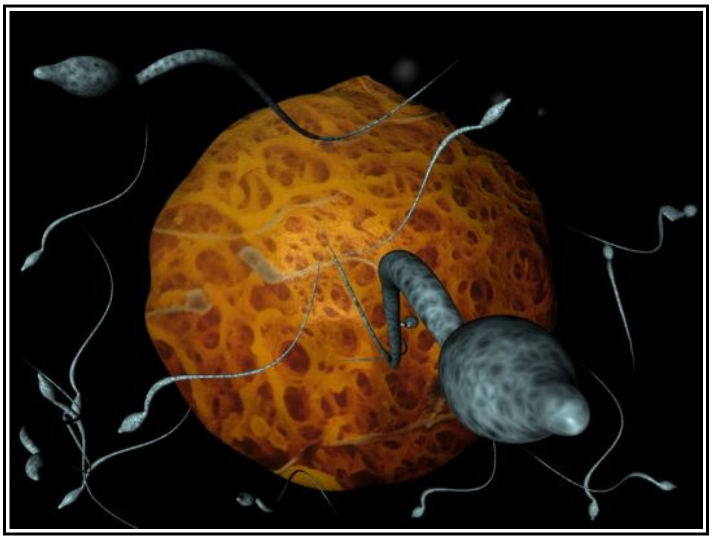
On remplace alors la notion de probabilité par celle de *densité de probabilité* (probabilité par unité de mesure) ce qui entraîne l'obligation de calculer les probabilités associées à chaque fourchette par intégration de la densité sur cette fourchette. On n'associe plus de probabilités à des valeurs mais bien à des intervalles : c'est la σ-algèbre dite de Borel, comprenant les intervalles, les réunions et intersections d'intervalles que l'on nomme « boréliens ». Au sens strict, chaque valeur individuelle se voit alors attribuer une probabilité nulle (intégrale sur un domaine réduit à un point).

Dans la réalité, le niveau de précision de nos mesures ne nous permet pas ce genre de considération. En deçà d'un certains niveau de précision, toutes les mesures sont équivalentes et indifférenciées.

Il existe donc une différence importante entre le zéro des mathématiciens et celui des statisticiens et des probabilistes. Le premier est rigoureusement égal à zéro, avec éventuellement une infinité de décimales toutes aussi nulles, le second désigne une valeur qui ne peut pas être distinguée du zéro des mathématiciens étant donnés notre information et notre système de mesures. C'est totalement différent.

Et chaque jour, une de ces valeurs de probabilité nulle ou en tout cas non différenciée de 0, est observée, puisque vous arrivez à votre bureau bien à l'heure, on l'espère, en un certain temps *t* appartenant à [900, 3600] : voilà un événement « stochastiquement impossible » dont la réalité ne peut être mise en doute.

A titre d'autre exemple de calcul, envisageons à présent la probabilité que vous soyez « vous ». C'est-à-dire que « le » spermatozoïde de votre papa qui a fécondé « l' »ovule de votre maman au bon moment soit exactement le bon pour vous, c'est-à-dire celui qui a déterminé votre patrimoine génétique. On estime aujourd'hui à environ 30 000, le nombre de gènes du génome humain. Chaque spermatozoïde comme chaque ovule est une cellule haploïde, ne portant donc qu'une moitié de l'information du papa ou de la maman. À partir du génome d'un individu, on peut donc former 2 puissance 30000 spermatozoïdes, en choisissant au hasard chaque fois un gène sur deux. La probabilité que le « bon » soit formé est de 1 divisé par 2 puissance 30000. Idem pour maman. La probabilité que vous soyez « vous » est donc nulle (en tout cas non mesurable raisonnablement). Néanmoins vous existez.



Mais la contradiction n'est qu'apparente. La probabilité que vous soyez « vous » est nulle. Mais la probabilité qu'un individu, très proche génétiquement de vous, existe, est égale à 1, ou presque. À moins que vos parents ne soient stériles ce qui impliquerait, cher lecteur, que vous n'existez pas... hypothèse que nous nous permettons de rejeter.

Le raisonnement est le même en ce qui concerne la probabilité de l'apparition bien réelle et constatable, d'une machine aussi complexe que l'être humain en général. Notre existence à tous semble impossible, selon certains fondamentalistes, sans recours à l'hypothèse d'un « dessein intelligent ». C'est mal comprendre le calcul des probabilités. Et mal connaître la biologie. Étant donné les conditions initiales et actuelles sur terre, la probabilité que « des » machines complexes se soient constituées et continuent d'exister est très significativement différente de zéro. Mais les solutions peuvent être multiples, très nombreuses et la probabilité que ces machines soient précisément « nous » semble nulle en première approximation. On peut imaginer un monde alternatif peuplé d'êtres auto-organisés pensants ou non-pensants différents de notre réalité observée... Tous les auteurs de science fiction l'ont fait. Ce point de vue peut être contesté. Des phénomènes de convergence sont observés qui montrent que la pression du milieu sélectionne systématiquement certaines formes et réduit significativement le nombre de solutions viables.

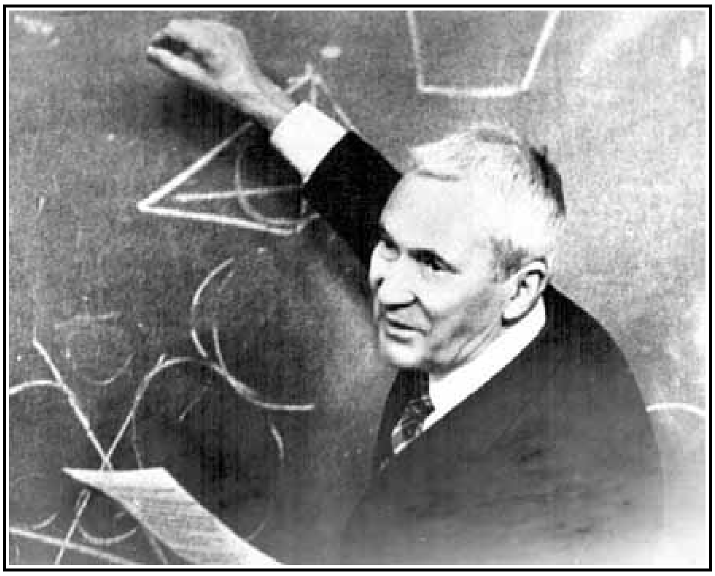
Et le problème redevient mathématique : y a-t-il ou non unicité de la solution au problème de l'existence et de l'essence de formes organisées de matière dans un milieu donné ? Nos mathématiques actuelles ne sont pas encore suffisantes pour répondre à cette question. Mais l'utilisation des mathématiques en biologie sera peut-être l'un des éléments moteurs de leur développement dans un futur proche. Je ne puis m'empêcher pour conclure de citer Joël E. Cohen de la prestigieuse Rockfeller University, dans un article en ligne[1] :

Dans le siècle qui commence, la biologie va stimuler la création de domaines mathématiques entièrement nouveaux. En ce sens, la biologie est la prochaine physique des mathématiques, mais en mieux. La biologie va stimuler la création de mathématiques fondamentalement nouvelles parce que la nature vivante est qualitativement plus hétérogène que la nature inanimée.

1 Cohen JE (2004) Mathematics Is Biology's Next Microscope, Only Better; Biology Is Mathematics' Next Physics, Only Better. http://www.plosbiology.org/article/info:doi/10.1371/journal.pbio.0020439.

Encadré :

Andreï Kolmogorov : l'inventeur de l'axiomatique du calcul des probabilités



Andreï Nikolaïevitch Kolmogorov (1903 - 1987) est un mathématicien russe dont les apports en mathématiques ont été gigantesques : il a rationalisé le calcul des probabilités et obtenu des résultats fondamentaux dans maints domaines : dès 1922, à l'âge de 19 ans, Kolmogorov publia d'importants résultats en théorie des ensembles et l'année suivante concernant l'analyse de Fourier.

C'est en 1929, dans le cadre de ses recherches en théorie du potentiel, qu'il proposa sa fameuse théorie axiomatique des probabilités (qui allait débarrasser le calcul des probabilités de certaines de ses auto-références, tout en répondant également partiellement au 6^{e} problème de Hilbert) mais ce n'est qu'en 1933 que paraîtra son manuel des *Fondements de la théorie des probabilités*.

Il touchera d'autres domaines encore (topologie, étude des systèmes dynamiques, étude de la turbulence) et résoudra, entre autre, le 13^{e} problème de Hilbert qui posait la question :

> Existe-t-il des fonctions continues de 3 variables non superposables par des fonctions continues de deux variables ?
>
> A titre d'explication, une fonction h de 3 variables est définie par superposition des trois fonctions f, g et k de 2 variables si pour tout x, y et z, on a :
>
> $$h(x,y,z) = f(g(x,y),k(y,z)).$$

La réponse à cet angoissant problème fut donnée en 1954 par Kolmogorov et son élève Vladimir Arnold (1937 - 2010). Elle tient en un seul mot : non !

Kolmogorov fut également le lauréat de nombreuses distinctions internationales, notamment en France puisqu'il devint, en 1955, docteur honoris causa de la Sorbonne.