

Partie 1

OBSERVATION ET MODÉLISATION INTUITIVE D'ACTIFS FINANCIERS

1 Liens historiques entre l'économie et les mathématiques

1.1 Considérations générales

Alors que les sciences mathématiques interviennent depuis longtemps à présent et de façon apparemment naturelle dans les sciences dites “dures”, comme la physique, la chimie, la biologie, les technologies utilisées par les ingénieurs civils, elles n'ont conquis droit de cité que très tardivement dans les sciences dites “humaines”, et ce, plus particulièrement en économie. C'est essentiellement une conséquence de l'extrême complexité des situations rencontrées et surtout de l'arbitraire de la plupart des motivations constituant le sous-jacent actif de la variabilité et de l'évolution des phénomènes étudiés.

Expliquons quelque peu ce point de vue au moyen d'un exemple qui fera apparaître intuitivement l'une des différences essentielles. Il est infiniment plus difficile d'étudier de manière rationnelle le comportement d'individus pris individuellement ou de groupes d'individus influant sur de multiples paramètres en économie et déterminant par exemple, par la loi de l'offre et de la demande, la valeur d'un produit (financier ou autre), que de modéliser après étude et observations multiples, la trajectoire d'un corps soumis à des forces variées et complexes certes, mais parfaitement définies, constantes dans le temps et non soumises à des modifications sans raison.

Là est la principale difficulté de la modélisation économique : l'absence de rationalité des acteurs et, partant, l'imprévisibilité de valeurs élémentaires. Il est relativement aisé de calculer la situation relative au soleil, d'un satellite artificiel dans 10 ans (l'horizon choisi élimine le risque d'écarts trop importants dus aux équations chaotiques). Il est impossible de prévoir la

valeur du taux d'intérêt à court terme dans trois mois.

De plus, l'évolution des facteurs intervenant fait qu'un phénomène économique n'est jamais observé qu'une seule fois dans des conditions identiques. Les lois des grands nombres sont alors d'une utilité toujours limitée.

Enfin, le nombre très élevé des paramètres intervenant dans un problème de type économique, joint à la quantité des facteurs d'influence jouant un rôle dans le contexte à considérer, fait qu'un traitement efficace des problèmes réels n'a pu intervenir avant le développement de l'informatique intégrant la prise en compte et le traitement automatique du calcul matriciel et du calcul des probabilités.

Certains auteurs avancent également des raisons d'ordre psychologiques. Ainsi, selon Davis-Hersh¹,

les économistes ont longtemps souffert d'un véritable complexe d'infériorité. A voir les splendides succès qu'obtenaient dans le bâtiment voisin, leurs collègues physiciens, qu'il s'agit de théorie planétaire ou d'électromagnétisme, ils se sentaient jaloux et se disaient qu'il leur faudrait attendre leur Newton.

1.2 Aperçu historique

Les premiers théoriciens de l'économie politique moderne, avec à leur tête l'anglais D. Ricardo (1772-1823), n'employaient aucune technique scientifique. Ils faisaient, selon J.R. Hicks², des *mathématiques dans la coulisse*, c'est-à-dire comme Monsieur Jourdain faisait de la prose, sans le savoir.

L'italien Pareto (1848-1923) mit en évidence l'importance de la notion de fonction en économie en déclarant :

Les économistes littéraires perdent leur temps à chercher des relations de cause à effet là où il n'y a que des relations fonctionnelles réversibles entre les données qui se conditionnent mutuellement.

Pratiquement au même moment naissait en 1871, la théorie du "marginalisme" développée séparément par le français Walras (1834-1910) et

¹Voir [?] page 83.

²Prix Nobel d'Economie en 1972.

l'austro-anglais Jevons (1835-1882). On y mettait en évidence l'importance de la dernière unité dans l'influence de chaque variable, ce qui ouvrait la porte à l'utilisation du calcul infinitésimal en économie.

Il est intéressant de constater que les grands économistes de la fin du 19^e siècle et du début du 20^e siècle ont très souvent utilisé des expressions à caractère mathématique pour présenter leurs résultats (recours à l'algèbre, aux graphiques, aux exemples numériques), et ce de manière directe (Gournot, Marc (1818-1833)) ou détournée (Keynes (1883-1946) et Walras). Mais, ils ont publié leurs résultats "en littérature" pour ne pas rebuter les lecteurs potentiels³. Dans tous ces cas aussi, avancer plus loin dans la théorie exige la mathématisation⁴.

Tout au long du vingtième siècle, les économistes se rendirent progressivement compte de la puissance de la démarche scientifique (et plus particulièrement mathématique) et iront même jusqu'à créer des théories mathématiques nouvelles pour résoudre leurs problèmes spécifiques.

Les méthodes d'optimisation de Kuhn-Tucker et les théories modernes de programmation non linéaire ont permis de résoudre certains problèmes fondamentaux que se posait l'économiste, comme la recherche de l'achat optimal que peut réaliser un consommateur avec un budget déterminé.

L'économétrie, apparue vers 1930 comme discipline autonome, recourt à la fois à la théorie économique, à la formulation mathématique et à l'analyse statistique. En 1969, le premier prix Nobel d'Économie fut décerné à Frisch et Tinbergen qui peuvent être considérés comme les fondateurs de l'économétrie.

Par la suite, cette suprême distinction fut fréquemment attribuée à des mathématiciens reconvertis à l'économie et des économistes très quantitatifs. Citons quelques exemples parmi les plus significatifs de Prix Nobels en Économie attribués à des travaux à caractère essentiellement mathématique :

- Samuelson (1970), célèbre pour ses travaux fondamentaux en économie et l'introduction du calcul et du calcul de probabilité dans la résolution de problèmes économiques.

³Encore aujourd'hui, le terme "mathématique" dans le titre d'un ouvrage à caractère économique ou financier est une entrave à sa vente.

⁴Voir S.S. Kolm, *Philosophie de l'Économie*, Editions du Seuil, Paris, p. 101, 1986.

- Arrow (1972), connu pour son fameux théorème d'impossibilité dans la théorie du choix collectif ainsi que pour ses contributions dans les théories des formes quadratiques sous contraintes et des fonctions quasi-concaves.
- Leontief (1973), créateur de l'analyse input-output.
- Kantorovitch (1975), pionnier de la programmation linéaire.
- Klein (1980), auteur de contributions importantes en économétrie.
- Debreu (1983), mathématicien de formation et auteur d'une célèbre théorie de la valeur : l'analyse axiomatique de l'équilibre économique (1966).
- Modigliani (1985) pour son travail de pionnier de la modélisation de l'épargne et des marchés financiers.
- Allais (1988), ingénieur de formation pour sa plaidoirie en faveur de l'emploi judicieux de l'outil mathématique en économie.
- Markowitz, Sharpe et Miller (1990), pour leurs travaux novateurs sur la théorie économique financière et le financement des entreprises.
- Nash, Harsanyi et Selten (1994) pour leur contribution fondamentale à la théorie des jeux non-coopératifs.
- Merton, Scholes et Black (1997), pour leurs modélisations stochastiques en finance et plus particulièrement pour le développement de formules de valorisation d'options utilisables en salles de marchés.
- Sen (1998), pour sa théorie du choix social ayant pour objet l'analyse des relations entre les préférences individuelles et les décisions collectives.
- Mundel (1999) pour son analyse de la politique monétaire et fiscale.

2 Liens historiques entre les mathématiques et la finance

Bien que la théorie financière fasse partie intégrante de l'économie, ses rapports avec les mathématiques sont très anciens et importants. La raison de ces liens privilégiés résultent certainement du fait que les données

financières sont quantitatives, ce qui conduit presque naturellement à une modélisation mathématique.

2.1 Débuts des activités commerciales

Quels furent les débuts de l'activité commerciale? A quel(s) moment(s), dans l'histoire de l'humanité, les échanges sociaux au sein d'un groupe se sont-ils (progressivement?) transformés en véritables transactions à caractère économique? Il paraît raisonnable de supposer que le mode d'existence des groupes de chasseurs-cueilleurs vivant en autarcie presque totale, ne requérait pas d'activité commerciale proprement dite. Dans les groupes de ce genre, les produits obtenus par travail collectif étaient probablement l'objet d'un *partage* déliant les individus de toute obligation réciproque et n'engageant aucun rapport de dominance⁵.

La sédentarisation de l'être humain (il y aurait 8 à 10 000 ans) est sans doute le premier pas vers une diversification suffisante des activités justifiant le recours aux premiers trocs "non sociaux", c'est-à-dire comportant dans l'esprit des contractants un désir de profit.

Le début des activités commerciales coïncide probablement avec le début de la notion de propriété privée et donc d'inégalités sociales. C'est à cette même époque qu'apparaissent des systèmes de sociétés plus complexes, que naissent les religions en tant que structures politiques partageant (ou non) le pouvoir, que la diversification des productions, et partant des besoins, menant à la spécialisation, débouche sur la nécessité d'échanges à caractère non sociaux.

2.2 Premières traces écrites

Les premières civilisations à laisser des traces écrites de transactions commerciales sont Mésopotamiennes. En fait, dès le IV^e millénaire BC, on peut raisonnablement parler de l'existence d'une monnaie au sens économique du terme, la valeur des produits étant exprimée en faisant référence au cuivre et à l'orge. Comme le prétend G. BOYER⁶, on peut parler de monnaie dès que l'on se trouve confronté à

⁵C. MEILLASSOU, Essai d'interprétation du phénomène économique dans les sociétés d'autosubsistance, Cah. Et. africaines, 4, 1960.

⁶*Nature et formation de la vente dans l'ancien droit babylonien*, RIDA 2, 1953, pp 45 -85.

des biens fongibles servant de commune mesure de la valeur et d'instrument d'échange indépendamment de l'utilité qu'ils présentent pour la satisfaction d'un besoin déterminé.

Entre le Tigre et l'Euphrate, l'argent abonde dans les mines et s'impose tout naturellement en tant que métal de base au titre de moyen de transaction. Mais les lingots ne sont utilisés que pour les gros règlements et l'orge concurrence l'argent comme moyen d'épargne.

Dès la IIIe dynastie d'Ur (environ 2100 BC), on découvre un système économique dans lequel la valeur des produits et le montant des salaires se trouvent exprimés en un certain poids d'or ou d'argent. On peut raisonnablement comparer l'évolution de la valeur des produits d'utilité courante que sont l'orge et l'huile⁷, découvrant ainsi les premières traces d'inflation.

Période	cours de l'orge	cours de l'huile
Présargonique	300 sila	
Akkad	240 sila	
Narâm-Sîn	0.5 sila	0.5 sila
Ur III	223.5 sila	13.33 sila
Ibbsîn	5 sila	2.5 sila
Mari	240 sila	8 sila
Hammurabi	de 240 à 90 sila	9 sila
Samsu-iluna	180 sila	

Le sicle⁸ d'argent était de l'ordre de 8 grammes (variantes existantes). Le *gur* de l'époque babylonienne valait environ 300 *sila* soit environ 250 litres. La valeur du *sila* était de l'ordre de 0.84 litre.

Il est visible qu'il y ait eu des crises graves sous les règnes de Narâm-Sîn (2254 - 2218) et d'Ibbsîn (2028-2004) (dynastie d'Akkad) (Dates et nomenclatures dynastiques : voir Georges ROUX⁹).

Les chiffres cités pour Naram-Sîn sont tirés d'une composition littéraire et n'ont pas de valeur en eux-mêmes, étant donné leur répétition stéréotypée (le texte mentionne par exemple également 1/2 *sila* de poissons pour un sicle d'argent). Par contre les chiffres d'Ibbsîn sont réels et l'on assiste

⁷Paul GARELLI, *Le Proche-Orient asiatique des origines aux invasions des peuples de la mer*, Presses Universitaires de France, 1969.

⁸Unité de poids.

⁹*La Mésopotamie, Essai d'histoire politique, économique et culturelle*, Seuil, 1985.

là, localement à une hausse spectaculaire des prix. On voit également qu'Hammurabi (1792-1750 BC) a lutté vainement contre l'inflation qui s'accroîtra encore au XVIII^e siècle BC.

Le code d'Hammurabi¹⁰ traite également de transactions utilisant un intermédiaire métallique :

Si un agent d'affaire a livré à un commis du grain, de la laine, de l'huile ou une marchandise quelconque à débiter, le commis mettra à jour l'argent et le rendra à l'agent d'affaire. Il recevra alors de ce dernier un reçu de l'argent qu'il lui aura remis.

Les premiers prêts d'argent consignés et retrouvés datent de cette même époque. On a pu découvrir à Sippar un texte cunéiforme en précisant les modalités et les garanties. Les taux d'intérêt annuels¹¹ pratiqués de manière courante à l'époque sont de 33.33 % pour les prêts exprimés en orge et de 20 % pour les prêts en argent¹². L'usage d'une arithmétique en base 60 permettait des calculs aisés, l'année étant par convention de 6 unités, donc de 360 jours. Il en reste encore des traces dans nos pratiques financières quotidiennes, l'année réelle de 365 jours n'étant pas encore généralisée dans les calculs d'escompte.

La différence entre les deux taux se justifie pleinement par la forte baisse du cours de l'orge à l'époque de la moisson qui était généralement celle des remboursements. On peut s'étonner de l'importance des intérêts mais il convient de relativiser. Dans un pays où les rendements agricoles sont de l'ordre de 30 ou 40 fois la quantité semée, les 33.33 % d'intérêt ne représentaient qu'environ 1 % de la moisson.

2.3 Invention de l'argent au sens usuel

La monnaie au sens usuel et actuel du terme apparaît en Lydie (contrée d'Asie Mineure, sur la mer Égée) où le roi Gygès découvre une rivière, le *Pactole*, dans laquelle des pépites en électrum (alliage naturel d'or et d'argent) en forme de haricots secs étaient particulièrement abondantes. Gygès décide de les utiliser comme référentiel monétaire en créant le "statère" (du grec $\sigma\tau\alpha\omega$: je suis fixe). Sous Crésus, la monnaie est

¹⁰paragraphe 104.

¹¹W. F. LEEMANS, The rate of interest in Old-Babylonian times, *RIDA*, 5, 7-34, 1950.

¹²Voir la tablette VAT 8528 datant de la première dynastie.

reconnue en tant qu'instrument du pouvoir. Progressivement pouvoir et potentialité financière vont se confondre. Cette confusion n'est pas près de disparaître.

2.4 Transition vers le monde moderne

L'arithmétique commerciale n'a été développée qu'au 15^{ème} siècle par les négociants italiens qui pouvaient exploiter l'algèbre élémentaire classique naissante, notamment grâce à la découverte des nombres négatifs par N. Chuquet (1484).

L'invention des logarithmes par J. Napier (1550-1617) a permis la naissance de la théorie de l'intérêt composé. Il a néanmoins fallu attendre l'emploi courant des ordinateurs pour que le législateur belge propose, en 1992, une méthode d'analyse numérique totalement correcte permettant le calcul du taux réel, appelé le TAEG (taux annuel effectif global), d'un achat à tempérament.

Notons ici la présence dans la littérature d'allusions fréquentes à l'arithmétique commerciale. On en trouve dans Molière ou dans Boileau¹³ en ce qui concerne l'intérêt simple, mais également dans l'oeuvre de Paul Féval. Nous donnons ce texte en annexe. Il illustre parfaitement la notion de progression géométrique, la notion d'intérêt composé et insiste sur la différence qui existe entre un modèle théorique et son application pratique.

2.5 Univers actuel

Jusque vers les années 1970, la finance proprement dite, techniques boursières et d'actuariat, ne nécessitait guère plus que la table de logarithmes. Les praticiens font appel à l'intérêt simple pour des contrats à court terme, et à l'intérêt composé, ou mieux encore à la capitalisation mixte, pour du plus long terme. Ils n'exploitent que rarement la capitalisation continue qui s'avère pourtant être basée sur des considérations réalistes. Cette théorie de la capitalisation continue fait appel à l'analyse infinitésimale classique et, de ce fait, aurait pu être élaborée et appliquée depuis longtemps, grâce aux travaux, notamment, de Newton (1642-1727), Leibniz (1646-1716).

¹³5000 ans d'histoire de l'argent au travers de la littérature, *Idioma*, 12, p. 37, 2001.

Malgré les travaux précurseurs de L. Bachelier (1870-1946) dont les mérites ne furent reconnus qu'à titre posthume, il fallut attendre la deuxième moitié de ce siècle pour observer un changement essentiel dans l'abord des phénomènes financiers grâce à l'intervention du calcul des probabilités et plus particulièrement à l'utilisation systématique des processus stochastiques.

Le point de départ de ce courant prend sa source dans les travaux de Markowitz et Tobin (1958) sur l'évaluation d'un capital par la valeur espérée (*expected value*) au lieu de la valeur (*value*) qui était seule considérée auparavant.

L'usage intensif du calcul stochastique en finance aurait été impossible sans les travaux purement mathématiques de Lebesgue (1875-1941), célèbre pour l'intégrale qui porte son nom et le développement de la théorie de la mesure essentiellement dû à Kolmogorov (1903-1987), considéré par beaucoup comme le père de la théorie moderne des probabilités. Citons encore les travaux considérables de Wiener (1894-1964) et Lévy (1886-1973) qui ont jeté les bases des processus stochastiques.

Le japonais Itô, dès 1951, a profité des résultats théoriques de ses prédécesseurs pour mettre au point un calcul différentiel et intégral stochastique parfaitement adapté à l'étude des phénomènes du type *actif boursier*.

Les concepts mathématiques qui ont développé et renouvelé la finance et qui sont utilisés aujourd'hui quotidiennement à Chicago, Paris, Londres ou Singapour, notamment sur les marchés des produits dérivés, ont été élaborés au sein des mathématiques dites *pures*, c'est-à-dire de questionnements internes aux mathématiques¹⁴. A contrario, on observe également que c'est la confrontation aux produits boursiers qui a permis au mathématicien Benoit Mandelbrot de développer sa théorie des fractals.

Comme l'a fait remarquer le défunt Fisher Black¹⁵ :

The best pure research grows from efforts to solve applied problems. The best applied research to solve problems grows from intellectual curiosity.

¹⁴Voir Nicolas Bouleau, *Martingales et marchés financiers*, Editions Odile Jacob, p. 35, 1998.

¹⁵Propos rapportés par ses confrères Robert Merton et Myron Scholes dans le *Journal of Finance*, Vol L. n°5, 1995.

Grâce à ce bagage mathématique sophistiqué, les théories financières ont beaucoup évolué ces dernières années. Leurs modèles reposent sur des hypothèses qui doivent être fréquemment affaiblies ou modifiées, notamment parce qu'elles perdent de leur pertinence en périodes de crise, de sorte que les modèles sous-jacents deviennent alors obsolètes.

Le passage à l'univers aléatoire ne se fait pas sans difficulté mathématique. La nécessité du développement progressif d'un nouvel outil de modélisation apparaît progressivement. C'est cette démarche intuitive que nous présentons.

3 Observation d'indices boursiers

3.1 L'indice BEL-20

La considération d'indices boursiers permet une bonne approche descriptive et intuitive des problèmes inhérents à la modélisation mathématique de produits financiers.

Prenons le cas du BEL-20, l'indice des valeurs clefs de la bourse de Bruxelles, créé depuis le 31 décembre 1990 et effectivement et officiellement utilisé depuis le 18 mars 1991. Il rassemble les 20 actions belges les plus importantes au niveau de l'intensité et de l'ampleur des transactions boursières et ne prend pas en considération le paiement de dividendes¹⁶.

Sa valeur au temps t qui sera notée $I(t)$ est calculée au moyen de la formule d'agrégation dite *de Paasche*.

Mathématiquement, on a :

$$I(t) = \frac{\sum_{i=1}^{20} P_i(t) \cdot Q_i(t)}{\sum_{i=1}^{20} P_i(0) \cdot Q_i(0)} \cdot I(0) \quad (1)$$

dans laquelle $I(0)$ a été fixé arbitrairement à 1 000 au temps initial $t = 0$ (correspondant au 31 décembre 1990), et dans laquelle aussi $P_i(t)$ et $Q_i(t)$ désignent respectivement le prix et la quantité (poids) attribués à l'actif i au temps t dans l'indice.

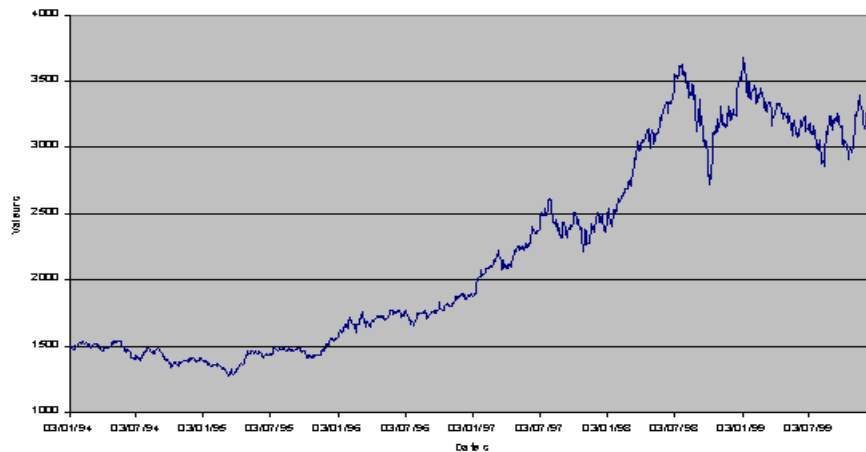
Cet indice est donc sensible aux variations de prix des différentes actions y participant mais également aux modifications de sa structure, certains

¹⁶En cela il diffère d'autres indices comme par exemple l'un des indices luxembourgeois

actifs entrant ou sortant de l'agrégat ou encore, voyant leur importance relative (poids) modifiée en fonction de l'intensité des transactions les concernant.

Notons que dans ce cas la continuité de l'indice n'est assurée que moyennant l'introduction de coefficients de pondération lors de chaque modification de sa structure. Ce point sera présenté plus loin en annexe, dépassant le cadre du présent exposé introductif.

L'indice fluctue fortement au cours du temps, subissant la triple influence que nous venons de décrire, ainsi qu'en atteste le graphique suivant qui donne en ordonnées les valeurs de l'indice vues comme fonction du temps.

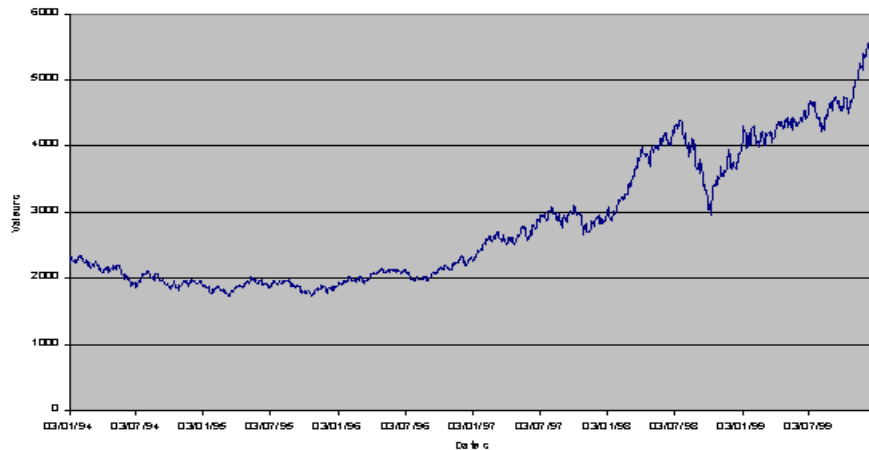


Cette première observation nous permet quelques considérations qui s'appliqueront, nous le verrons dans la suite, à la très grande majorité des actifs. On constate en effet une tendance générale (ici à la hausse, mais ce sera parfois le contraire) fortement perturbée par des variations à très court terme qui semblent *aléatoires* ou en tout cas, *erratiques*.

3.2 Autres produits similaires

Les financiers se réfèrent à de multiples indices nationaux et internationaux ou encore sectoriels. Si leur allure générale diffère parfois très fortement, on peut néanmoins découvrir une certaine communauté de structure. Pour nous en convaincre, présentons le comportement de

l'indice français CAC 40 depuis une dizaine d'années :



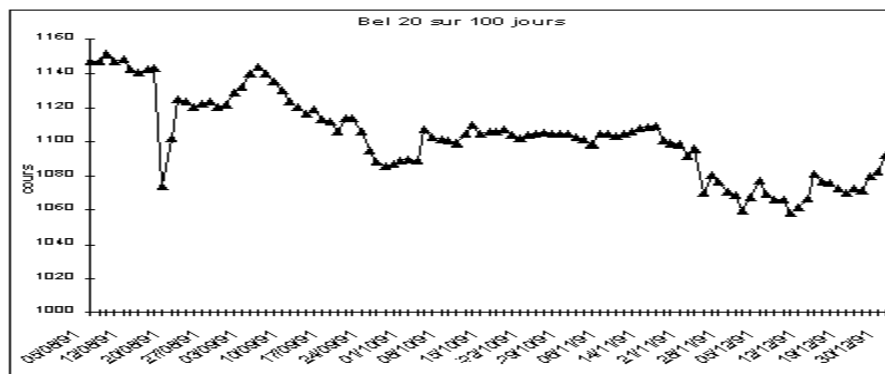
L'interprétation, la modélisation et surtout la gestion (en termes de placement, de risque et surtout d'espérance de bénéfice) de ce type de comportement n'est pas triviale. Or, aujourd'hui, l'accès aux marchés financiers n'est plus réservé aux seuls spécialistes. Les particuliers peuvent investir directement en bourse (en actions ou obligations sur les marchés belges et étrangers) grâce à de nombreux fonds OPC (Organisme de Placement Collectif) qui offrent des multitudes de formules de SICAV (Société d'Investissement à Capital Variable) avec des politiques d'investissement plus ou moins risquées. Ces produits diversifiés, agrégats de placements plus ou moins risqués, généralement internationaux, suivent également des trajectoires se traduisant par des graphiques du même type que ceux que nous avons présentés précédemment.

Les deux premiers exemples présentés l'ont été sur le long terme, de manière à faire apparaître la différence entre le long et le court terme. Les graphiques ci-dessus sont certes différents mais possèdent néanmoins deux caractéristiques communes quant à leur structure évolutive. D'une part, on constate que sur une période assez longue, il semble que la *tendance* soit à la hausse. D'autre part, à côté de cette tendance (*trend* en anglais), sont observées à court terme de petites (ou grandes) fluctuations qui paraissent irrégulières, aléatoires, pour tout dire erratiques.

Notre objectif est de fournir des modèles mathématiques décrivant de telles situations en séparant la *trend* des fluctuations aléatoires.

3.3 Différence entre le long et le court terme

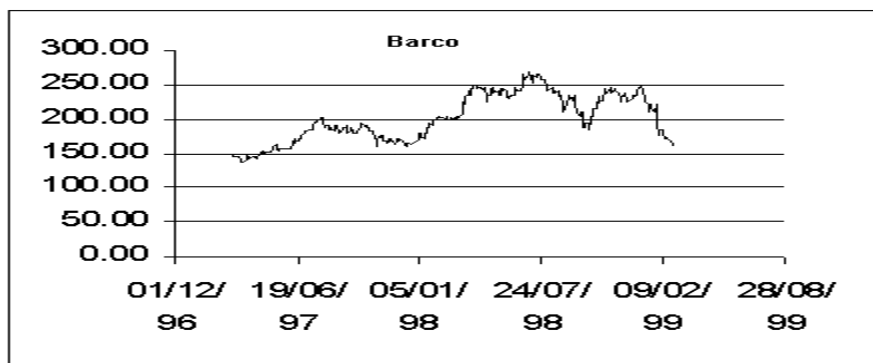
Les exemples présentés sont évidemment bien choisis. La tendance à long terme est “visible”. Mais l’importance des fluctuations à court terme relativement à la tendance couvre parfois cette dernière. Localement, les fluctuations “imprévisibles” peuvent avoir infiniment plus d’ampleur que les variations dues au comportement à long terme. Un bel exemple nous en est fourni par l’indice Bel-20 entre le 5 août 1991 et le 31 décembre de la même année.



On y constate une tendance à la baisse (alors que sur le long terme, la tendance est clairement à la hausse), assortie de variations en une ou deux séances de cotations supérieures à la variation globale de l’indice sur plus de 100 séances.

Le choix d’indices, d’agrégats, n’est pas neutre non plus. L’étude d’un actif particulier présente généralement une tendance moins *perceptible*. A titre d’exemple, nous présentons à moyen terme l’évolution de l’action belge Barco de mars 1997 à février 1999. Pour ce titre, aucune tendance n’est visible sur un horizon de presque deux ans.

On a :



On le voit, les comportements sont multiples, et il conviendra de présenter une modélisation suffisamment générale afin de les couvrir tous.

4 Modélisation déterministe de la *trend*

4.1 Présentation discrète

Afin de dégager la tendance générale d'une valeur financière, il existe des techniques statistiques spécifiques à l'étude de séries chronologiques. Nous allons dans un premier temps nous contenter de travailler intuitivement sur des exemples simples. Nous nous proposons tout d'abord d'examiner un nombre restreint d'observations judicieusement choisies parmi les diverses observations de la grandeur étudiée et ce pour le long terme.

Illustrons notre propos en analysant l'évolution sur 10 ans de la valeur d'inventaire V , estimée en début d'année, d'un fonds d'épargne-pension¹⁷ pour lequel on dispose des données suivantes :

¹⁷Il s'agit de valeurs fictives certes, mais s'inspirant de celles observées pour le *Metropolitan Rentastro* issu de la fusion le 1/11/1996 du fonds *Rentastro* avec le Fonds d'Epargne Pension *Metropolitan* commercialisé par l'ex *Crédit à l'Industrie de Belgique*, lequel est à présent une part active du groupe *Fortis Belgium*.

Années	temps t	valeurs V_t
1987	0	603
1988	1	712
1989	2	841
1990	3	993
1991	4	1172
1992	5	1384
1993	6	1633
1994	7	1930
1995	8	2279
1996	9	2689
1997	10	3173

Pour mesurer de façon pertinente la rentabilité de ce fonds commun de placement sur une année, on fait généralement appel au *taux de rendement* qui est défini comme suit :

$$R_t = \frac{V_t - V_{t-1}}{V_{t-1}} = \frac{V_t}{V_{t-1}} - 1$$

et ce pour toute valeur de t variant de 1 à 10. Pour cet exemple (bien choisi et pour tout dire *construit*), le taux de return est presque constant et égal à 0.181, soit 18.1 %. Ceci signifie que quelle que soit l'année t prise en considération ($t = 1$ à 10), la variation de la valeur $\Delta V_t = V_t - V_{t-1}$ calculée relativement à la valeur mesurée en début d'année est quasi constante. Mathématiquement, on a approximativement :

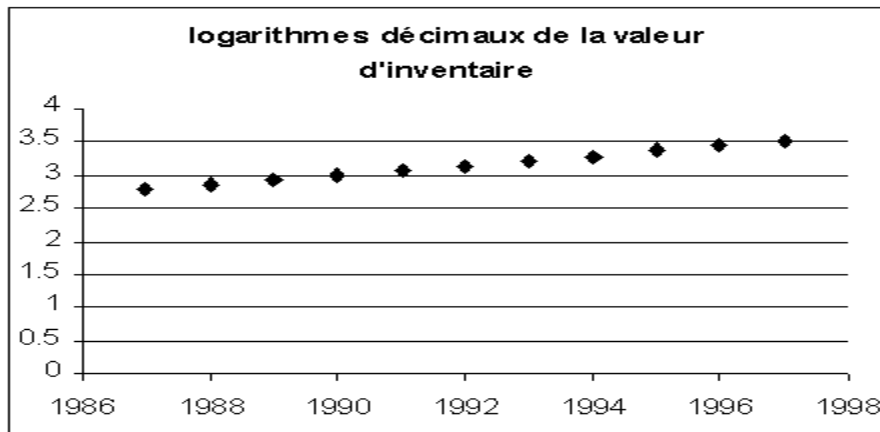
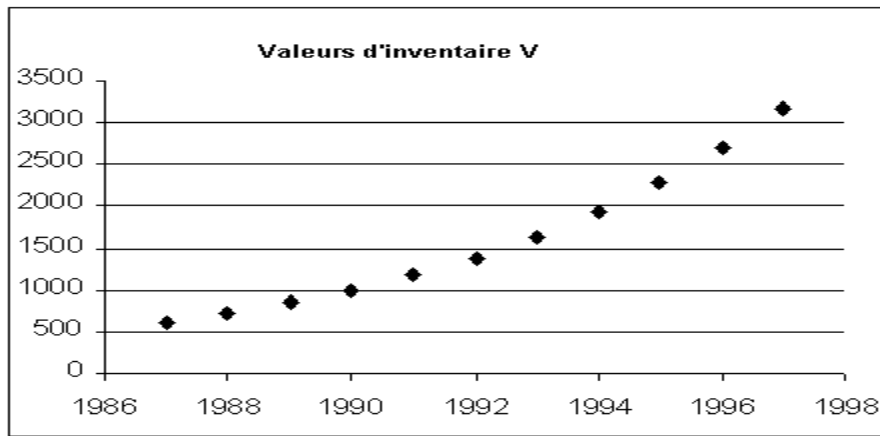
$$\frac{\Delta V_t}{V_{t-1}} = \frac{V_t - V_{t-1}}{V_{t-1}} \approx 0.181$$

Cette dernière égalité est en fait une équation récurrente dont la solution¹⁸ est donnée par :

$$V_t \approx V_0 \cdot (1.181)^t$$

avec $V_0 = 603$. Observons que pour t naturel, on retrouve bien (en première approximation) les valeurs expérimentales. Une représentation en coordonnées semi-logarithmiques donne presque le graphique d'une droite, les logarithmes décimaux de V_t étant en progression arithmétique de raison $0.07 \approx \log(1.181)$.

¹⁸On vérifie que l'équation $V_t - V_{t-1} = 0.181V_{t-1}$ se traduit par l'expression $V_t = 1.181V_{t-1}$, soit par une progression géométrique.



Une régression linéaire usuelle en coordonnées semi-logarithmiques du type

$$\log V_t = a.t + b$$

conduit à la modélisation exponentielle¹⁹

$$V_t = 603.164 * (1.18067)^t$$

vraiment très proche des valeurs *observées*²⁰.

¹⁹Pour éviter la confusion, dans certains cas nous notons l'opération de multiplication par le symbole usuel des informaticiens *

²⁰A titre d'information, le coefficient de corrélation est égal à 0.99999975, ce qui tend à confirmer le caractère artificiel de l'exemple

Notre démarche théorique conduit à une représentation très proche des résultats “observés” pour des valeurs entières du temps, mais qu’en est-il pour des valeurs réelles quelconques du paramètre t ?

4.2 Passage au continu

Le passage au continu pose le problème de la différence entre taux de return par période (unité de temps) et taux de rendement instantané²¹, c’est-à-dire, fondamentalement, par le passage de la mathématique discrète (équations aux différences finies) à la mathématique continue (équations différentielles). Il nous faut définir une fonction $V : t \rightarrow V(t) = V_t$, continue sur l’intervalle $[0, 10[$. Au lieu de mesurer des variations par année, on travaille sur des intervalles de temps quelconques, éventuellement très courts que l’on convient de noter Δt . On peut alors définir un taux de return par unité de temps²² sur tout intervalle $[t, t + \Delta t[$. On a formellement :

$$R_{t,\Delta t} = \frac{V_t - V_{t-\Delta t}}{\Delta t \cdot V_{t-\Delta t}}$$

Partons à présent de l’hypothèse émise plus haut déjà, d’un taux de croissance par unité de temps constant et égal à r . L’équation devient alors :

$$\frac{V_t - V_{t-\Delta t}}{\Delta t} = [V_{t-\Delta t}] \cdot r$$

En passant à la limite pour Δt tendant vers 0 et en supposant la fonction V dérivable sur l’intervalle $[0, 10[$, on trouve, pour tout $t \in [0, 10 [$:

$$\frac{dV(t)}{dt} = V_t \cdot r$$

Cette équation différentielle élémentaire à variables séparées a déjà été présentée et possède comme solution, à une constante multiplicative près, la fonction exponentielle de base e :

$$V(t) = V_0 \cdot e^{r \cdot t}$$

Pour que cette expression coïncide avec la relation obtenue intuitivement en univers discret, on doit avoir :

$$e^r = 1.181$$

²¹en anglais *spot rate*

²²Ce qui explique la division par Δt

On en tire

$$r = 0.1664$$

Cet exemple met en évidence la différence significative entre taux de return annuel en description discrète (0.181) et taux de return instantané en continu (0.1664).

5 Modélisation des fluctuations aléatoires

Comme nous venons de le constater dans le paragraphe précédent, la tendance générale ou *trend* de la série chronologique étudiée est assez bien décrite par une équation différentielle ordinaire (l'équation différentielle usuelle, *classique*), puisque l'on peut écrire :

$$\frac{dV_t}{V_t} = \frac{dV(t)}{V(t)} = 0.1664 dt$$

On en déduit une approximation linéaire localement acceptable (Δt suffisamment petit) :

$$V(t + \Delta t) - V(t) \approx 0.1664V(t)\Delta t$$

D'une manière générale, une équation différentielle ordinaire (EDO en abrégé) permet de modéliser les phénomènes dont les variations instantanées par unité de temps sont mesurables, c'est-à-dire les phénomènes permettant à court terme une prévision raisonnable localement linéaire.

Mathématiquement, la solution d'une EDO est une fonction différentiable, dont le graphe est une courbe *lisse* admettant en tout point une tangente. C'est cette dernière qui permet l'approximation linéaire et garantit donc l'existence d'une prévision locale.

La considération du monde économique réel conduit rarement à des phénomènes localement linéaires et donc prévisibles. Les graphiques que nous avons présentés en début de paragraphe et qui décrivaient l'évolution d'indices réels ne sont jamais lisses et présentent de très nombreux points anguleux (ruptures de tendance et donc absence de prévisibilité même à court terme). En fait les fonctions obtenues sur base d'observations réelles sont généralement presque partout non différentiables. On le constate encore en observant le graphe décrivant l'évolution réelle du fonds Metropolitan Rentastro qui nous a servi de support pour la construction de notre exemple simplifié :



Il n'est donc pas question, pour des actifs financiers de ce type, de tenter une description utilisant des EDO. En effet, on observe dans la réalité des variations erratiques qui affectent et perturbent la tendance lisse prévisible observable à long terme. Ces perturbations peuvent être très intenses à très court terme, et même paraître imprévisibles et présenter des variations fort brutales. On le constate, la fonction réelle $V(t)$ que nous avons tenté de décrire plus haut n'est pas dérivable et doit comporter une composante aléatoire dont la description formelle fait l'objet du chapitre suivant.

De tels phénomènes seront modélisés dans la suite par la superposition de deux composantes : une fonction déterministe, modélisant la tendance (la *trend*) et une composante stochastique, variable aléatoire particulière, qui va caractériser la *volatilité* de l'actif décrit, c'est-à-dire la variabilité erratique de sa trajectoire relativement à sa tendance.

Mathématiquement (ou en tout cas formellement), les variations infinitésimales de l'évolution de l'actif $V(t)$ au cours du temps vont obéir à une équation différentielle du type suivant :

$$\frac{dV(t)}{V(t)} = \mu dt + \sigma dS(t, \omega)$$

dans laquelle le premier terme, μdt (μ étant une constante caractérisant le taux de croissance à long terme) se réfère à la *trend*, tandis que le second terme, $\sigma dS(t, \omega)$ (σ étant une constante quantifiant la volatilité ou encore l'amplitude des variations erratiques relativement à la tendance), décrit les perturbations instantanées non prévisibles perturbant la *trend*.

Ce terme stochastique, représenté formellement par une variable aléatoire notée $S(t, \omega)$, inclut la notation symbolique ω , représentant un état possible, aléatoire, de la nature.

Une équation du type que nous venons de proposer est appelée *équation différentielle stochastique*, EDS en abrégé. La formalisation de ce type d'équations fait l'objet du chapitre suivant.

Partie 2

INTRODUCTION AUX ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES STOCHASTIQUES

Nous justifions ici l'abandon de la théorie classique des équations différentielles pour construire l'outil adéquat à la description d'actifs à risque.

1 Abandon de l'intégrale de Riemann

1.1 Présentation intuitive

Considérons un modèle mathématique qui décrit l'évolution d'un système économique au cours du temps que nous notons $x(t)$. Supposons que les altérations soient fonction d'influences prévisibles et d'autres, aléatoires.

Mathématiquement, cette hypothèse conduit à l'équation différentielle :

$$dx(t) = f(x, t)dt + v(x, t, \omega)dt. \quad (2)$$

où $f(x, t)$ décrit les fluctuations prévisibles et $v(x, t, \omega)$ les fluctuations aléatoires.

À l'instant initial $t = 0$, on suppose l'état du système connu. On pose (conditions initiales ou problème de Cauchy) :

$$x(0) = x_0.$$

L'introduction de certaines hypothèses est utile pour traduire le mieux possible la conjoncture économique. Ces hypothèses sont imposées au processus aléatoires $v(x, t, \omega)$:

- Hypothèse 1

$$E[v(x, t, \omega)] = 0 \quad \forall t \in \mathfrak{R}^+.$$

Cette condition exprime l'absence de tendance de la partie aléatoire de (??). Toute information de tendance peut s'intégrer dans la partie déterministe sans altération de généralité.

- Hypothèse 2

$v(x, t, \omega)$ est indépendant de $v(x, s, \omega)$ pour t différent de s . Cette condition exprime l'imprévisibilité de l'univers économique.

- Hypothèse 3

On suppose les variances du processus v calculables et finies pour tout t . Les processus de variabilité excessive sont écartés, ne permettant pas de gestion rationnelle.

Ces trois hypothèses semblent naturelles. Malheureusement, elles ne permettent pas une description de l'aléatoire. En effet, sous ces hypothèses économiquement réalistes, le processus v est presque sûrement déterministe. Ce résultat n'est pas intuitif. Nous en donnons une démonstration rigoureuse.

1.2 Support mathématique

THÉORÈME 2.1

Soit $v(t, \omega)$ satisfaisant aux conditions suivantes :

- i. $v(t, \omega)$ indépendant de $v(s, \omega)$ pour t différent de s .
- ii. $v(t, \omega)$ est de carré intégrable.
- iii. $E[v(t, \omega)] = 0$.
- iv. $E[v^2(t, \omega)] \leq K$.

Sous ces conditions, la composante cumulée de variabilité aléatoire est de variance nulle.

Toute perturbation aléatoire non prévisible décrite au moyen des équations différentielles ordinaires et respectant nos conditions économiquement réalistes est de variance nulle et donc déterministe.

Démonstration

Notons $u(t, \omega)$ le processus variations cumulées :

$$u(t, \omega) = \int_0^t v(s, \omega) ds.$$

Le processus v étant de carré intégrable, le processus u existe toujours. On montre facilement que l'espérance du processus u est nulle. On a en effet :

$$E[u(t, \omega)] = \int_0^t E[v(s, \omega)] ds = 0$$

en vertu du point iii et de la linéarité de l'intégrale. Pour calculer la variance, il faut passer par la définition de l'intégrale de Riemann.

C'est ici qu'apparaît la propriété qui rend cette dernière inutilisable pour les phénomènes économiques évoluant aléatoirement. On a :

$$\begin{aligned} \text{VAR}[u(t, \omega)] &= E[u^2(t, \omega)] = E\left[\int_0^t v(s, \omega) ds\right]^2 \\ &= \lim_{\nu \rightarrow 0} E\left[\sum_{i=1}^n v(t_i^*) \cdot (t_{i+1} - t_i)\right]^2 \end{aligned}$$

où

- ν est la norme de la subdivision ($\nu = \max_i(t_{i+1} - t_i)$)
- t_i^* est un point intermédiaire de l'intervalle $[t_i, t_{i+1}[$.

En développant le carré, on obtient :

$$\text{VAR}[u(t, \omega)] = \lim_{\nu \rightarrow 0} E\left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v(t_i^*) \cdot v(t_j^*) (t_{i+1} - t_i) \cdot (t_{j+1} - t_j)\right].$$

En vertu de l'hypothèse i, on constate que les espérances des produits

$$v(t_i^*) \cdot v(t_j^*) \quad i \neq j$$

sont identiquement nulles. La variance devient donc :

$$\begin{aligned}\text{VAR}[u(t, \omega)] &= \lim_{\nu \rightarrow 0} E \left[\sum_{i=1}^n v^2(t_i^*) (t_{i+1} - t_i)^2 \right] \\ &= \lim_{\nu \rightarrow 0} \left[\sum_{i=1}^n E[v^2(t_i^*)] (t_{i+1} - t_i)^2 \right].\end{aligned}$$

Les variances apparaissant ici sont bornées (hypothèses iv.) et l'on a :

$$\text{VAR}[u(t, \omega)] \leq K \cdot \lim_{\nu \rightarrow 0} \left[\sum_{i=1}^n (t_{i+1} - t_i)^2 \right]$$

où K est un majorant pour les variances de v . La dernière limite est nulle : il suffit pour s'en convaincre de choisir une subdivision en n intervalles de longueur égale à t/n . La limite pour ν tendant vers 0 est égale à :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (t/n)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{t^2}{n^2} = 0,$$

ce qui achève la démonstration.

2 Promenade aléatoire

2.1 Point de vue probabiliste

On peut justifier intuitivement l'impossibilité d'une description probabiliste réaliste par mesure des variations aléatoires par unité de temps en se basant sur la notion de *promenade aléatoire* (*random walk* en anglais). Considérons une succession de n pas de longueur Δx effectués aléatoirement et indépendamment tantôt vers la gauche (événement noté ω_1), tantôt vers la droite (événement noté ω_2) avec probabilités identiques 0.5, qui traduit dans cette modélisation simpliste l'absence de tendance.

Étudions la variable "position après n pas". Cette dernière peut être vue comme la somme de n variables aléatoires indépendantes équidistribuées du type ($k = 1, \dots, n$) :

$$\begin{aligned}X_k(\omega_1) &= -\Delta x \text{ avec probabilité } 0.5 \\ X_k(\omega_2) &= \Delta x \text{ avec probabilité } 0.5.\end{aligned}$$

On vérifie que l'espérance de X_k est nulle et que sa variance vaut :

$$\text{VAR}[X_k] = (\Delta x)^2.$$

La moyenne de la variable position après n pas, est bien entendu nulle et l'hypothèse d'indépendance permet le calcul de la variance de la variable "somme". Posons :

$$X = \sum_{k=1}^n X_k$$

On a immédiatement :

$$V[X] = n(\Delta x)^2$$

L'écart-type est bien proportionnel à la racine du nombre de pas. Lorsque les pas sont effectués à intervalles de temps réguliers Δt , on retrouve pour un intervalle $[0, t]$ (avec t multiple de Δt ou encore $\frac{t}{\Delta t}$ entier) :

$$t = n * \Delta t \quad n = \frac{t}{\Delta t}$$

On en déduit :

$$V[X] = \frac{t(\Delta x)^2}{\Delta t}$$

et

$$\sigma[X] = \sqrt{t} \cdot \frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta t}}$$

La variance est bien proportionnelle à la durée t de l'intervalle et l'écart-type à sa racine carrée. Les variations aléatoires se mesurent en fonction de la racine du temps écoulé rendant toute mesure par unité de temps impossible. C'est cette constatation qui nécessite un traitement mathématique particulier et la création d'un être mathématique différent.

2.2 Point de vue financier

Nous allons considérer un actif simplifié dont les variations à court terme sont essentiellement aléatoires, indépendantes et ne permettent pas une description au niveau de la tendance. Ce dernier point est conforme à la grande majorité des actifs à risque observés sur le marché.

Envisageons une action dont la cotation peut être modifiée toutes les minutes (Δt) par une augmentation ou une diminution équiprobables d'une unité monétaire (Δx). Cette description "court terme" exclut la présence d'une tendance. Décrivons donc la valeur de l'actif à l'instant t au moyen de la somme de variables aléatoires équidistribuées et indépendantes X_k valant ± 1 avec probabilités respectives $\frac{1}{2}$:

$$X(t) = X(0) + \sum_{k=1}^t X_k$$

On a donc, étant donné les résultats présentés plus haut :

$$E[X(t)] = X(0) \quad (3)$$

$$V[X(t)] = t \quad (4)$$

En passant à l'écart-type, mesure acceptable de variabilité, on constate que les variations aléatoires à court terme sont d'intensité proportionnelle à la racine du temps, qui, mathématiquement, possède une tangente verticale en 0. Ce point explique théoriquement l'importance extrême des variations à court terme des actifs à risque. On comprend ici également l'impossibilité d'avoir recours aux EDO dans ce contexte aléatoire.

3 Mouvement brownien standard

3.1 Processus stochastique

Définition 2.1

On appelle processus stochastique ou processus aléatoire à valeurs réelles toute application

$$X : \mathbb{R}^+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R} : (t, \omega) \rightarrow X(t, \omega).$$

Le processus $X(t, \omega)$ décrit l'évolution chronologique d'un phénomène aléatoire. Abusivement, il est parfois noté $X(t)$, ou encore X_t .

3.2 Processus stochastiques particuliers

a. Processus à accroissements indépendants

Définition 2.2

Un processus $X(t, \omega)$ est à accroissements indépendants si, pour toute succession d'instants croissants :

$$0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k \quad (k \in \mathbb{N})$$

les variables "accroissements" :

$$X(t_k) - X(t_{k-1}), \dots, X(t_2) - X(t_1), \quad X(t_1) - X(0)$$

sont indépendantes.

Les processus à accroissements indépendants décrivent des états évoluant dans un univers où les variations passées n'influencent pas les variations futures.

b. Processus à accroissements stationnaires

Définition 2.3

Notons F la fonction de répartition d'une variable²³. Le processus $X(t, \omega)$ est à accroissements stationnaires si

$$F(\xi, \theta_1, \theta_2) = P\{\omega \in \Omega \mid X(\theta_2, \omega) - X(\theta_1, \omega) < \xi\}$$

est une fonction de $\theta_2 - \theta_1$. On note :

$$F(\xi, \theta_1, \theta_2) = F^*(\xi, \theta_2 - \theta_1).$$

La distribution associée à l'accroissement de la variable sur l'intervalle $[\theta_1, \theta_2]$ est indépendante des instants particuliers θ_1 et θ_2 . Elle ne dépend que de la durée écoulée.

N'ayant pas de renseignements sur les perturbations de l'évolution de l'actif dans le futur, on met sur ces dernières une distribution choisie en fonction d'une argumentation objective, qui est seule fonction de l'intervalle de temps. Nous verrons plus loin ce qui justifie ce choix.

3.3 Mouvement brownien

Définition 2.4

Considérons un processus $X(t, \omega)$ dans lequel le paramètre t parcourt l'intervalle $[0, T]$ et satisfait aux conditions suivantes :

- i. $X(0, \omega) = 0$

²³Nous optons pour une description de type *càd-làg*, en considérant des processus dont la trajectoire est continue à droite avec une limite à gauche, ce qui explique notre choix particulier de la fonction de répartition.

Le processus de Wiener va jouer le rôle d'un bruit perturbateur dans un phénomène. Cette condition exprime que l'on impose à la perturbation de ne pas agir aléatoirement à l'origine des temps. L'état initial du système est supposé connu.

- ii. $\forall t \in [0, T]$, la distribution de $X(t, \omega)$ est normale.

Le choix de la normalité est une conséquence de la théorie des erreurs et du théorème central-limite. Le bruit intervenant dans le phénomène peut être interprété comme la somme des erreurs relatives à la tendance de son évolution. Le bruit est la traduction des modifications non prévisibles de façon déterministe généralement dues à des circonstances extérieures et non contrôlées. Nous donnons plus loin une justification théorique de la normalité passant par l'équation de Focker-Planck.

- iii. L'espérance de $X(t, \omega)$ est nulle pour tout $t \in [0, T]$.

En moyenne, l'“erreur” par rapport au modèle déterministe est nulle. Les fluctuations sont donc uniquement aléatoires et ne peuvent modifier la tendance qui décrit le plus correctement possible, compte tenu de nos informations²⁴, l'évolution future attendue du phénomène étudié. Cette hypothèse n'est pas limitative : si une tendance était attendue a priori, on l'inclurait dans la description déterministe.

- iv. Le processus $X(t, \omega)$ est un processus à accroissements indépendants et stationnaires.

Les fluctuations qui interviennent dans le phénomène modélisé peuvent apparaître à tout moment sans qu'un instant ne soit privilégié (stationnarité). En outre, les fluctuations antérieures n'influent pas sur d'éventuelles fluctuations futures (indépendance)

Un processus $X(t, \omega)$ qui satisfait aux propriétés i. à iv. est appelé processus de Wiener ou *mouvement brownien*.

²⁴C'est ici que devrait intervenir la notion théorique de *filtration*. Nous n'aborderons pas cette matière de manière formelle dans ce travail. Nous considérons simplement que nous nous limitons aux cas probabilisables.

3.4 Variabilité d'un Brownien

Posons :

$$V(t) = \text{variance } [X(t, \omega)].$$

On a (par artifice de calcul) :

$$\begin{aligned} V(t+s) &= V[X(t+s, \omega)] = \text{Var}[X(t, \omega) + [X(t+s, \omega) - X(t, \omega)]] \\ &= V[X(t, \omega)] + V[X(t+s, \omega) - X(t, \omega)] \end{aligned}$$

le processus étant à accroissements indépendants, la covariance est nulle.

$$V(t+s) = V(t) + V[X(s, \omega) - X(0, \omega)]$$

Le processus étant à accroissements stationnaires, on obtient finalement :

$$V(t+s) = V(t) + V[X(s, \omega) - 0] = V(t) + V(s),$$

ce qui achève la démonstration : la variance est donc une fonction linéaire du temps²⁵. On peut poser

$$V(t) = k.t$$

$$\sigma[X(t, \omega)] = \sqrt{k.t}.$$

Définition 2.5

Lorsque la variance du processus est égale au temps, il est appelé *mouvement brownien standard* (M.B.S.).

En résumé, pour un M.B.S., lorsque la notation E désigne l'espérance mathématique et V la variance :

$$\begin{aligned} E[X(t, \omega)] &= 0 \\ E[X^2(t, \omega)] &= V[X(t, \omega)] = t. \end{aligned}$$

Les notations classiquement utilisées pour les M.B.S. sont : $w(t, \omega)$, en hommage au mathématicien Wiener, $B(t, \omega)$: allusion au mouvement Brownien, ou encore, lorsqu'aucune confusion n'est possible, $X(t, \omega)$. Dans la suite, nous utiliserons toujours la notation $w(t, \omega)$.

²⁵On peut travailler en dimension fractale quelconque.

3.5 Court et long terme

Considérons un phénomène pour lequel on peut décrire l'évolution au moyen de l'équation :

$$\begin{aligned} \text{Variation} &= \text{partie déterministe (proportionnelle au temps)} \\ &+ \text{partie aléatoire (proportionnelle à la racine} \\ &\quad \text{carrée du temps).} \end{aligned}$$

Mathématiquement :

$$V(\Delta t) = a(t) * \Delta t + b(t, \omega) * \sqrt{\Delta t}$$

A court terme, les variations aléatoires ont plus d'importance que les variations déterministes. A long terme, c'est l'inverse. Le court terme correspond donc à l'inégalité implicite :

$$b(t) * \sqrt{\Delta t} > a(t) * \Delta t$$

Si $a(t)$ et $b(t)$ sont (approximativement) constants sur $[t, t + \Delta t]$, on a pour le court terme (cette hypothèse est relativement réaliste, on n'observe que rarement de grandes fluctuations sur de petits intervalles de temps...) :

$$\Delta t < \frac{b^2(t)}{a^2(t)}$$

On peut également vérifier que la partie aléatoire des variations instantanées (avenir très proche) peut avoir parfois une amplitude exceptionnelle. En effet, si les variations aléatoires sont proportionnelles à la racine du temps, leur dérivée (variation instantanée) est inversement proportionnelle à cette racine et tend donc vers l'infini lorsque Δt tend vers 0. Les modifications au voisinage du présent de l'amplitude des fluctuations inattendues peuvent être extrêmement grandes.

4 Justification de la normalité

Etudions toujours le même phénomène évoluant aléatoirement au cours du temps à partir de la promenade aléatoire et notons $f(x, t)$ la probabilité associée à l'état x ($x \in \mathfrak{R}$) à l'instant t ($t \in \mathfrak{R}^+$). Considérons un intervalle de temps de durée Δt et intéressons-nous à la probabilité d'atteindre l'état

x durant l'intervalle $[t, t + \Delta t[$. La position x peut être atteinte à l'instant $t + \Delta t$ soit à partir de la position $x - \Delta x$ occupée à l'instant t et ce avec probabilité $p = \frac{1}{2}$ soit encore, à partir de la position $x + \Delta x$ occupée à l'instant t et ce avec probabilité $1 - p = \frac{1}{2}$. Formellement :

$$f(x, t + \Delta t) = \frac{1}{2}f(x - \Delta x, t) + \frac{1}{2}f(x + \Delta x, t)$$

Après développement en série de Taylor jusqu'aux deuxièmes et troisièmes termes (Δt est du même ordre que Δx^2 par hypothèse, ce qui justifie le choix du dernier terme du développement) et en désignant les dérivées partielles au moyen de la notation indicée, on arrive à :

$$\begin{aligned} f(x, t + \Delta t) &= f(x, t) + \Delta t f'_t(x, t) + O(\Delta t^2) \\ f(x - \Delta x, t) &= f(x, t) - \Delta x f'_x(x, t) + \frac{1}{2}\Delta x^2 f''_{xx} + O(\Delta x^3) \\ f(x + \Delta x, t) &= f(x, t) + \Delta x f'_x(x, t) + \frac{1}{2}\Delta x^2 f''_{xx} + O(\Delta x^3) \end{aligned}$$

L'équation de départ devient:

$$\begin{aligned} f(x, t) + \Delta t f'_t(x, t) &= \frac{1}{2} \left[f(x, t) - \Delta x f'_x(x, t) + \frac{1}{2}\Delta x^2 f''_{xx} \right] \\ &+ \frac{1}{2} \left[f(x, t) + \Delta x f'_x(x, t) + \frac{1}{2}\Delta x^2 f''_{xx} \right] \end{aligned}$$

ou encore

$$\Delta t f'_t(x, t) = \frac{1}{2}\Delta x^2 f''_{xx}$$

Étant donné le rapport (standardisation) entre Δt et Δx^2 , on obtient (à un $O(\Delta x^3)$ près) :

$$f'_t(x, t) = \frac{1}{2}f''_{xx}$$

Cette manière de procéder permet le passage à la limite (Δt et Δx tendant vers 0 sous la condition de standardisation) et la considération après ce passage, de densités de probabilité et non plus de probabilités. On vérifie sans peine que la fonction densité normale de moyenne 0 et de variance égale au temps :

$$f(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}$$

satisfait cette équation.

5 Notion d'intégrale stochastique

5.1 Une définition nouvelle

Il n'est pas possible de définir une différentielle trajectoire par trajectoire (c'est-à-dire pour tout état ω de la nature) de $w(t, \omega)$ au sens classique de l'analyse. Notre présentation intuitive du paragraphe précédent ne résiste pas à une analyse rigoureuse. Le calcul stochastique de Itô a permis d'étendre la notion de différentiation aux processus stochastiques grâce à un procédé global de complétion sur l'espace Ω . D'une manière formelle, nous allons introduire des équations du type

$$dX = f(X, t)dt + \sigma(X, t)dw.$$

Dans cette expression, dX représente la variation du phénomène X sur l'intervalle $[t, t + \Delta t[$, le premier terme est une différentielle classique. Le deuxième est à définir.

5.2 Intégrale stochastique de fonctions en escaliers

Définition 2.6

f étant une fonction en escaliers, on peut définir f de la manière suivante sur $[\alpha, \beta]$: en découpant l'intervalle de la façon *classique* :

$$\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = \beta.$$

Dès lors :

$$f(t, \omega) = f_i(\omega) \text{ lorsque } t \in [t_i, t_{i+1}[.$$

Le choix des bornes est conforme à la continuité à droite. Attention: les $f_i(\omega)$ sont des variables aléatoires. Deux réalisations successives du processus donneront des valeurs différentes. Par contre, les instants t_i sont considérés comme déterministes.

Ces considérations sont conformes aux observations en univers financier. En salle de marché, toutes les k minutes, la nouvelle valeur d'un actif est affichée. Sa représentation pour l'investisseur est donc constituée par une fonction en escaliers dont les marches sont des variables aléatoires mais dont les instants de séparation sont déterministes.

Définition 2.7

On appelle intégrale stochastique d'une fonction en escaliers l'expression :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t, \omega) dw(t, \omega) = \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k, \omega) \cdot [w(t_{k+1}, \omega) - w(t_k, \omega)] \quad (5)$$

Insistons sur le choix bien particulier de t_k pour valeur de la variable temps. On prend la borne inférieure et non un point quelconque de l'intervalle. Un autre choix conduit à une autre définition de l'intégrale, une définition non équivalente. Ces résultats sont présentés dans le paragraphe suivant.

On peut expliquer ce choix en considérant que l'information de l'observateur est limitée au seul passé proche. Le choix d'un point intermédiaire introduirait une spéculation sur le futur. Encore une fois, cette définition tient compte de la réalité du marché. Entre deux cotations successives, l'investisseur ne connaît pas l'évolution de la valeur de l'actif qui l'intéresse. Son information (et donc la σ -algèbre dont il dispose) ne lui permet pas d'anticiper la valeur de l'actif entre ces deux cotations. La formulation de l'intégrale stochastique tient compte de cette réalité.

L'intégrale stochastique est une variable aléatoire. Elle dépend bien entendu de la réalisation du mouvement brownien standard qui participe à sa définition.

On peut, par conséquent, calculer moyenne et variance d'une intégrale stochastique. C'est probablement l'extrême facilité de ce calcul qui a fait le succès de la définition de Itô, malgré les surprenantes modifications des formules de différentiation qui vont apparaître.

Propriété 2.1

a. Lorsque la fonction intégrée est indépendante du brownien standard de référence $w(t, \omega)$, la moyenne d'une intégrale stochastique est toujours nulle.

$$E \left[\int_{\alpha}^{\beta} f(t, \omega) dw(t, \omega) \right] = 0$$

b. La variance d'une intégrale stochastique se calcule au moyen d'une intégrale ordinaire, c'est-à-dire à l'aide de l'intégrale de Riemann.

$$E \left[\left[\int_{\alpha}^{\beta} f(t, \omega) dw(t, \omega) \right]^2 \right] = E \left[\int_{\alpha}^{\beta} f^2(t, \omega) dt \right] \quad (6)$$

Démonstrations

Pour une fonction en escaliers définie sur $[\alpha, \beta[$, avec:

$$\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = \beta$$

$$f(t, \omega) = f_i(\omega) \text{ lorsque } t \in [t_i, t_{i+1}[$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t, \omega) dw(t, \omega) = \sum_{k=1}^{n-1} f(t_k, \omega) * [w(t_{k+1}, \omega) - w(t_k, \omega)]$$

a. La moyenne de l'intégrale stochastique est nulle.

$$E \left[\int_{\alpha}^{\beta} f(t, \omega) dw(t, \omega) \right] = 0$$

Lorsque $f(t, \omega)$ et $w(t, \omega)$ sont indépendantes, la propriété est immédiate étant donnée la définition.

b. La variance d'une intégrale stochastique se calcule au moyen d'une intégrale de Riemann.

$$E \left[\left[\int_{\alpha}^{\beta} f(t, \omega) dw(t, \omega) \right]^2 \right] = E \left[\int_{\alpha}^{\beta} f^2(t, \omega) dt \right]$$

A partir de la définition, on obtient successivement:

$$E \left[\left[\int_{\alpha}^{\beta} f(t, \omega) dw(t, \omega) \right]^2 \right] = E \left[\sum_{k=1}^{n-1} f(t_k, \omega) * [w(t_{k+1}, \omega) - w(t_k, \omega)] \right]^2$$

Le processus $w(t, \omega)$ étant à accroissements indépendants, les doubles produits sont d'espérance nulle. On obtient:

$$E \left[\left[\int_{\alpha}^{\beta} f(t, \omega) dw(t, \omega) \right]^2 \right] = E \left[\sum_{k=1}^{n-1} f^2(t_k, \omega) * [w(t_{k+1}, \omega) - w(t_k, \omega)]^2 \right]$$

Lorsque la fonction $f(t, \omega)$ est indépendante du MBS w , l'espérance du produit est égal au produit des espérances.

$$\begin{aligned} E \left[\left[\int_{\alpha}^{\beta} f(t, \omega) dw(t, \omega) \right]^2 \right] &= \sum_{k=1}^{n-1} E[f^2(t_k, \omega)] * E[w(t_{k+1}, \omega) - w(t_k, \omega)]^2 \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} E[f^2(t_k, \omega)] * [t_{k+1} - t_k] \end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration, la dernière expression définissant l'intégrale de Riemann. Pour des fonctions quelconques de classe L^2 , c'est-à-dire de carré intégrable, le résultat s'obtient par passage à la limite.

6 Effets de non-anticipativité

L'intégrale stochastique telle qu'elle vient d'être définie dépend fortement de l'hypothèse de non-anticipativité que nous avons tenté de justifier intuitivement avant d'en formaliser la présentation.

On peut montrer qu'un choix différent de la valeur initiale de la fonction pour tout intervalle intervenant dans la subdivision choisie conduit à une définition non équivalente. Quelques résultats préliminaires permettront de concrétiser cette différence.

6.1 Propriétés limites de carrés d'accroissements

Considérons un intervalle $[0, t]$ divisé en n sous-intervalles de longueur identique que nous noterons par commodité

$$[t_0, t_1[, [t_1, t_2[, \dots, [t_{n-1}, t_n[$$

avec $t_k = \frac{k.t}{n}$. Intéressons-nous à la variable aléatoire

$$X_n(t, \omega) = \sum_{k=0}^{n-1} [w(t_{k+1}, \omega) - w(t_k, \omega)]^2$$

dans laquelle $w(t)$ représente un processus de Wiener ou M.B.S. Cette variable peut être vue comme la somme de n carrés de distributions normales $N(0, \sqrt{\frac{t}{n}})$.

Une transformation élémentaire permet de retrouver la distribution χ_n^2 usuelle (somme de carrés de normales centrées réduites) d'espérance n et de variance $2n$. On vérifie aisément que

$$X_n(t, \omega) = \frac{t}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{[w(t_{k+1}, \omega) - w(t_k, \omega)]^2}{\frac{t}{n}} = \frac{t}{n} \chi_n^2$$

avec

$$E[X_n] = \frac{t}{n} \cdot n = t$$

et

$$V[X_n] = \left[\frac{t}{n}\right]^2 \cdot 2n = \frac{2t^2}{n}$$

La variance de cette distribution tend uniformément vers zéro lorsque le nombre de points de subdivision croît et l'on peut en déduire que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(t, \omega) = t \quad (7)$$

avec probabilité 1. A la limite, l'expression devient presque sûrement déterministe. D'une manière formelle, lorsque l'on considère non un horizon t mais un accroissement d'horizon dt , on note généralement :

$$(dw(t, \omega))^2 = dt$$

6.2 Une intégrale de Itô particulière

Considérons la subdivision particulière de l'intervalle $[0, t]$ que nous venons d'introduire et calculons

$$\int_0^t w(s, \omega) dw(s, \omega)$$

On a par définition de l'intégrale stochastique :

$$\int_0^t w(s, \omega) dw(s, \omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=0}^{n-1} w(t_k) [w(t_{k+1}) - w(t_k)] \right]$$

Un calcul algébrique élémentaire montre que

$$w(t_k) [(w(t_{k+1}) - w(t_k))] = \frac{1}{2} [w^2(t_{k+1}) - w^2(t_k)] - \frac{1}{2} [w(t_{k+1}) - w(t_k)]^2$$

On en tire

$$\int_0^t w(s, \omega) dw(s, \omega) = \frac{1}{2} w^2(t) - \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=0}^{n-1} [w(t_{k+1}) - w(t_k)]^2 \right]$$

Vu le résultat établi au paragraphe précédent, on obtient :

$$I_0(t) = \int_0^t w(s, \omega) dw(s, \omega) = \frac{1}{2} w^2(t) - \frac{1}{2} t$$

Encore une fois, une transformation élémentaire permet de retrouver une distribution χ_1^2 et de calculer les moments de l'intégrale stochastique. On obtient :

$$I_0(t) = \frac{t}{2} \left[\frac{w^2(t)}{t} \right] - \frac{t}{2} = \frac{t}{2} \cdot \chi_1^2 - \frac{t}{2}$$

et donc

$$E[I_0(t)] = 0$$

et

$$V[I_0(t)] = \frac{t^2}{2}$$

6.3 Intégrale de Stratonovich

Nous considérons à présent la définition de l'intégrale stochastique anticipative (choix du dernier point de l'intervalle ou d'un point intermédiaire) introduite par Stratonovich.

Nous nous plaçons dans le cas particulier de notre subdivision régulière pour la commodité du raisonnement. Formellement, on a ici :

$$\int_0^t f(s, \omega) dw(s, \omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=0}^{n-1} f(t_{k+1}, \omega) [w(t_{k+1}) - w(t_k)] \right]$$

Dans le cas particulier $f(t, \omega) = w(t, \omega)$, on obtient :

$$I_1(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=0}^{n-1} w(t_{k+1}, \omega) [w(t_{k+1}) - w(t_k)] \right]$$

On vérifie que

$$I_1(t) - I_0(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=0}^{n-1} [w(t_{k+1}) - w(t_k)]^2 \right] = t$$

étant donné le résultat obtenu plus haut. On en tire

$$I_1(t) = \frac{1}{2}w^2(t) + \frac{1}{2}t$$

Comme plus haut, on peut en calculer les moments (passage par la χ_1^2). On obtient :

$$E[I_1(t)] = t$$

et

$$V[I_1(t)] = \frac{t^2}{2}$$

Le choix de la définition de l'intégrale n'est pas neutre. Remarquons encore que pour un certain point intermédiaire (les trajectoires $w(t, \omega)$ étant continues), on obtiendra une définition de l'intégrale qui, formellement correspondra à notre *attente*, au résultat usuel de l'intégrale de Riemann. Posons :

$$I_d = (1 - d)I_0(t) + dI_1(t) = \frac{1}{2}w^2(t) - \frac{1}{2}(1 - 2d).t$$

Pour $d = \frac{1}{2}$, on a finalement :

$$\int_0^t w_d(s, \omega)dw(s, \omega) = \frac{1}{2}w^2(t, \omega)$$

7 Différentielle stochastique

7.1 Intégrale stochastique indéfinie

On peut étudier le processus stochastique particulier construit à partir de l'intégrale :

$$I(t, \omega) = \int_0^t f(s, \omega)dw(s, \omega). \quad (8)$$

Pour chaque t , on définit une variable aléatoire qui, au cours du temps, définira un nouveau processus stochastique, $I(t, \omega)$.

7.2 Différentielle stochastique

Définition 2.8

De manière formelle, on définit la différentielle stochastique

$$dF(t, \omega) = f(t, \omega)dw(t, \omega)$$

lorsque l'on peut écrire :

$$\int_0^t f(s, \omega) dw(s, \omega) = F(t, \omega). \quad (9)$$

La différentielle stochastique modélise les variations instantanées aléatoires. Lorsqu'un phénomène présente des fluctuations aléatoires, il sera commode de les représenter par un "accroissement stochastique" $dw(t, \omega)$ pondéré par une fonction décrivant la volatilité du phénomène à chaque instant. Cette dernière est une mesure objective de l'amplitude de variation imprévisible attachée à l'état du système étudié.

Revenons à la propriété (??) que l'on peut écrire :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} [w(t_{k+1}, \omega) - w(t_k, \omega)]^2 = t \quad (10)$$

Cette propriété permet de vérifier que le carré de la différentielle stochastique (qui rappelons-le n'a été introduite que de manière formelle) est égal à la différentielle du temps presque sûrement :

$$(dw)^2 = dt$$

Les relations qui suivent découlent naturellement de cette propriété.

Propriété 2.2 : différentiation stochastique d'un produit de processus.

Soient ξ_1 et ξ_2 deux processus admettant les différentielles stochastiques :

$$\begin{aligned} d\xi_1(t) &= a_1(t)dt + b_1(t)dw(t) \\ d\xi_2(t) &= a_2(t)dt + b_2(t)dw(t). \end{aligned}$$

Le produit $\xi_1\xi_2$ est également différentiable et :

$$d[\xi_1\xi_2] = \xi_1(t)d\xi_2(t) + \xi_2(t)d\xi_1(t) + b_1(t)b_2(t)dt. \quad (11)$$

7.3 Formule de Itô

Par souci de simplification, nous allons omettre systématiquement la référence à la variable aléatoire ω dans les équations. Ceci n'altère en rien la généralité du propos. ξ est un processus stochastique et non une variable déterministe.

Considérons un processus $\xi(t)$ obéissant à l'équation :

$$d\xi(t) = a(t) \cdot dt + b(t) \cdot dw(t),$$

ce qui signifie, par définition de la différentielle stochastique, que le processus $\xi(t)$ peut s'écrire :

$$\xi(t) = \xi(0) + \int_0^t a(s)ds + \int_0^t b(s)dw(s).$$

Le processus $\xi(t, \omega)$ suit une croissance déterministe $a(t)$ perturbée par des fluctuations aléatoires proportionnelles à un mouvement brownien standard. Beaucoup de phénomènes économiques suivent une telle évolution: croissance d'un capital, évolution du chiffre d'affaires, cotation d'une action en bourse, ...

Considérons à présent une fonction $f(x, t)$ de $\mathfrak{R} \times [0, +\infty[\rightarrow \mathfrak{R}$.

La fonction f dépend explicitement du processus ξ .

Supposons f continue de même que ses dérivées partielles f'_x, f'_t, f''_{xx} . La notation f'_x désigne la dérivée partielle de f par rapport à x .

Propriété 2.3

La formule de Itô permet le calcul de la différentielle de la fonction $f(\xi, t)$ où ξ est le processus stochastique défini plus haut.

$$df(\xi(t), t) = [f'_t(\xi, t) + f'_x(\xi, t)a(t) + \frac{1}{2}f''_{xx}(\xi, t)b^2(t)]dt + f'_x(\xi, t)b(t)dw(t) \quad (12)$$

On peut remarquer ici que la propriété d'une variabilité proportionnelle à la racine carrée du temps éclaire particulièrement bien le résultat obtenu par Itô. Un simple développement en série de Mac Laurin limité aux termes du premier ordre nous fournit le résultat attendu, en tenant compte du fait que les accroissements stochastiques $dw(t)$ sont d'ordre²⁶ $\frac{1}{2}$.

Pour ces termes, il est donc nécessaire de considérer les dérivées secondes. La formule de Itô ne suffit pas à résoudre tous les problèmes économiques.

²⁶Puissance de la racine carrée.

Elle permet parfois de les mettre en équation, rarement d'en trouver une solution explicite.

La résolution des équations différentielles stochastiques est bien souvent impossible. Nous présentons dans les chapitres qui suivent quelques exemples qui illustrent dans quelle mesure ces équations permettent une approche réaliste et *utilisable* de la description d'un contexte économique.

Remarquons enfin que dans la théorie classique, la différentielle totale de la fonction $f(x, t)$ aurait donné :

$$df(x(t), t) = f'_x(x, t)dx + f'_t(x, t)dt$$

ou encore, en remplaçant la différentielle dx par sa valeur formelle:

$$df = [f'_t + f'_x \cdot a]dt + f'_x \cdot b \cdot dw.$$

Le terme correcteur est :

$$\frac{1}{2}f''_{xx} b^2(t) dt.$$

L'apparition de ce terme peut s'interpréter comme suit :

L'écart type calculé pour le mouvement brownien standard est de l'ordre de la racine carrée du temps. Pour obtenir une variation de l'ordre du temps (et non de sa racine), il est obligatoire d'aller jusqu'aux termes du deuxième ordre, ce qui justifie intuitivement l'apparition du terme supplémentaire.

Partie 3

Processus de capitalisation et d'actualisation stochastiques

1 Processus stochastiques de capitalisation

1.1 Présentation classique

Considérons l'équation d'évolution classique d'un capital exprimant l'accroissement de ce capital comme une fraction variable $r(t)$ de ce capital par unité de temps :

$$dC(t) = r(t) \cdot C(t)dt$$

On peut aussi l'écrire

$$\frac{dC(t)}{C(t)} = dI(t).$$

$I(t)$ représente alors la fonction flux d'intérêt cumulé. Dans le cas déterministe :

$$I(t) = \int_0^t r(s)ds$$

La valeur $r(t)$ exprime l'accroissement unitaire par unité de temps au voisinage de l'instant t .

Dans le cas de la constance, l'expression se simplifie et $I(t) = r \cdot t$.

Supposons que ce taux soit affecté de perturbations aléatoires affectant la forme d'un mouvement brownien de diffusion variable. Des variations de diffusions seront certainement observées dans le futur même si notre information actuelle ne nous permet pas de les modéliser a priori.

1.1.1 Flux d'intérêt divergents

Soit $I(t)$ le processus flux d'intérêt cumulé partiellement stochastique. Supposons qu' $I(t)$ obéisse à l'équation différentielle stochastique :

$$dI(t) = r(t)dt + \sigma(t)dw(t).$$

Le flux $I(t)$ peut s'écrire par définition de la différentielle stochastique :

$$I(t) = I(0) + \int_0^t r(s)ds + \int_0^t \sigma(s)dw(s) \quad (13)$$

On peut supposer $I(0) = 0$, ce qui est assez logique si l'on refuse la rémunération instantanée du capital. Notons ici que pour certains produits, on peut envisager l'existence d'une prime initiale servant de produit d'appel, la signature du contrat conduisant à une rémunération instantanée, unique et donnant lieu à une singularité initiale. On a donc sous notre hypothèse :

$$E[I(t)] = \int_0^t r(s)ds$$

et

$$V[I(t)] = \int_0^t \sigma^2(s)ds$$

En particulier, lorsque la volatilité σ est une constante, la variance du processus *flux d'intérêt cumulé* tend vers l'infini lorsque l'horizon temps s'accroît.

La modélisation mise en place peut être critiquée. Le travail avec les processus de diffusion repose sur l'hypothèse de normalité du bruit perturbateur. Ce type de description attribue des probabilités strictement positives (mais généralement faibles) à des taux d'intérêt très bas (et parfois négatifs) ou très élevés. On remarque souvent lors des ajustements que l'hypothèse de normalité sous-estime les probabilités attribuées à ces événements éloignés de la tendance. Néanmoins, la construction d'une intégrale stochastique nécessite l'utilisation d'une distribution stable. Et nous savons depuis les travaux de Lévy (1930) que la seule distribution stable de variance finie (nécessaire pour une gestion sur bases rationnelles) est la distribution normale.

On peut construire l'équation différentielle d'évolution d'un capital $C(t)$ suivant le flux différentiel stochastique $I(t)$:

$$dC(t) = C(t) \cdot r(t) \cdot dt + C(t) \cdot \sigma(t) \cdot dw(t). \quad (14)$$

Cette équation (généralement qualifiée de *brownien géométrique*) est abondamment utilisée en finance et sert notamment de support à la très célèbre formule de Black et Scholes pour le calcul des options.

On peut écrire :

$$\frac{dC(t)}{C(t)} = r(t)dt + \sigma(t)dw(t).$$

La tentation est grande de travailler avec le logarithme népérien du capital $C(t)$. L'introduction d'une fonction annexe nous contraint à utiliser la formule de Itô. Posons :

$$K(t) = \ln C(t)$$

ou encore :

$$K(C(t), t) = K(x, t) = \ln x.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} K'_t &= 0 \\ K'_x &= \frac{1}{C(t)} \end{aligned}$$

(si l'on veut bien se souvenir que la variable x est représentée ici par $C(t)$)

$$K''_{xx} = \frac{-1}{C^2(t)}.$$

On obtient alors (formule de Itô) :

$$\begin{aligned} dK(t) &= \frac{1}{C(t)} \cdot r(t) \cdot C(t) \cdot dt - \frac{1}{2C^2(t)} \sigma^2(t) C^2(t) dt \\ &\quad + \frac{1}{C(t)} \cdot \sigma(t) \cdot C(t) \cdot dw(t, \omega) \end{aligned} \quad (15)$$

ou encore :

$$dK(t) = r(t)dt - \frac{\sigma^2(t)}{2}dt + \sigma dw(t, \omega). \quad (16)$$

On en tire :

$$K(t) = K(0) + \int_0^t \left(r(s) - \frac{\sigma^2(s)}{2} \right) ds + \int_0^t \sigma(s) dw(s, \omega)$$

et

$$C(t) = C(0) \cdot e^{\int_0^t \left(r(s) - \frac{\sigma^2(s)}{2} \right) ds} \cdot e^{\int_0^t \sigma(s) dw(s, \omega)}. \quad (17)$$

On peut comparer ce résultat à l'expression obtenue en univers déterministe:

$$C(t) = C(0) \cdot e^{\int_0^t r(s) ds}. \quad (18)$$

La correction stochastique est double. En premier lieu, la partie déterministe de l'expression (5) n'est pas égale à l'expression (6). Tout se passe

comme si la diffusion σ tempérerait d'une valeur $\sigma^2/2$ le taux d'accroissement du capital initial $C(0)$. Ceci n'est pas vraiment le cas. Nous allons montrer que l'espérance du processus (5) est effectivement égale à (6).

Ce résultat peut être obtenu en observant que la normalité de $w(t)$ implique la lognormalité du processus $C(t)$. La partie stochastique de la solution prend la forme d'une exponentielle dont l'exposant est un processus de Wiener. Cette exponentielle de normale ayant une tendance strictement supérieure à 1 doit être compensée. On peut donc écrire :

$$C(t) = C(0)e^{\int_0^t r(s)ds} e^{\int_0^t \sigma(s)dw(s,\omega) - \int_0^t \frac{\sigma^2(s)}{2}ds}$$

et voir la capitalisation stochastique comme une capitalisation déterministe perturbée par une lognormale compensée.

Dans le cas particulier d'un capital initial unité, on note $\Psi(t)$ le processus correspondant. On peut donc écrire :

$$\Psi_1(t) = e^{\int_0^t r(s)ds} e^{\int_0^t \sigma(s)dw(s,\omega) - \int_0^t \frac{\sigma^2(s)}{2}ds} \quad (19)$$

et noter

$$C(t) = C(0)\Psi_1(t)$$

1.1.2 Flux d'intérêt stables

On peut objecter que la présentation classique qui vient d'être détaillée néglige toute forme d'intervention des acteurs économiques. Dans le cas où ces derniers peuvent agir sur la situation et corriger les trop grands écarts par rapport à la tendance attendue, on peut opter pour une présentation introduisant le processus autocorrecteur :

$$dI(t) = \left[r(t) - \lambda \left[I(t) - \int_0^t r(\tau)d\tau \right] + \sigma(t)dw(t) \right] \quad (20)$$

Cette description inclut évidemment un *retour à la moyenne* propre aux processus de type *Ornstein-Uhlenbeck*. Remarquons que la correction à la tendance tient compte du manque à gagner global sur l'horizon $[0, t]$.

Le problème de Cauchy reste

$$I(0) = 0$$

Le processus décrit la tendance instantanée de croissance. La constante de rappel λ traduit la réaction du monde économique et financier face à

des dérapages trop importants par rapport à la tendance attendue sur un intervalle $[0, t[$.

Résolvons (8). Passons à l'équation homogène qui est purement déterministe et dont la solution est immédiate et élémentaire :

$$I_{ho} = Ke^{-\lambda t}$$

En utilisant la méthode classique de variation des constantes dans le cas stochastique, on pose :

$$K(t) = e^{\lambda t} I(t)$$

$K(t)$ obéit à l'équation différentielle (formule de Itô) :

$$dK(t) = \left[\lambda e^{\lambda t} I(t) + e^{\lambda t} \left[r(t) - \lambda I(t) + \lambda \int_0^t r(\tau) d\tau \right] + e^{\lambda t} \sigma(t) dw(t) \right] \quad (21)$$

On en tire successivement (attention aux changements de domaines d'intégrations lors de la permutation des intégrales) :

$$\begin{aligned} K(t) &= \int_0^t e^{\lambda s} r(s) ds + \lambda \int_0^t e^{\lambda s} \left[\int_0^s r(\tau) d\tau \right] ds + \int_0^t e^{\lambda s} \sigma(s) dw(s) \\ &= \int_0^t e^{\lambda s} r(s) ds + \lambda \int_0^t \int_\tau^t e^{\lambda s} r(\tau) ds d\tau + \int_0^t e^{\lambda s} \sigma(s) dw(s) \\ &= \int_0^t e^{\lambda s} r(s) ds + \int_0^t r(\tau) e^{\lambda t} d\tau - \int_0^t r(\tau) e^{\lambda \tau} d\tau + \int_0^t e^{\lambda s} \sigma(s) dw(s) \\ &= e^{\lambda t} \int_0^t r(s) ds + \int_0^t e^{\lambda s} \sigma(s) dw(s) \end{aligned}$$

On peut donc en déduire :

$$I(t) = \int_0^t r(s) ds + e^{-\lambda t} \int_0^t e^{\lambda s} \sigma(s) dw(s)$$

En particulier dans le cas d'une tendance et d'une diffusion constantes, on trouve :

$$I(t) = rt + e^{-\lambda t} \sigma \int_0^t e^{\lambda s} dw(s)$$

Ce flux est de moyenne rt comme le flux divergent (1). Mais sa variance reste finie lorsque t tend vers l'infini. On a en effet :

$$V[I(t)] = \frac{\sigma^2}{2\lambda} [1 - e^{-2\lambda t}]$$

Voyons à présent comment capitaliser sous flux d'intérêt stable. L'équation à résoudre est toujours :

$$dC(t) = C(t)dI(t)$$

Dans ce cas particulier, en remplaçant $I(t)$ par sa forme explicite :

$$dC(t) = C(t) \left[r(t) - \lambda e^{-\lambda t} \int_0^t e^{\lambda s} \sigma(s) dw(s) \right] + C(t) \sigma(t) dw(t)$$

En remarquant que les sources d'incertitude sont identiques. Comme pour les flux divergents, on pose :

$$K(t) = \ln C(t)$$

Et l'on en tire :

$$dK(t) = \left[\left[r(t) - \frac{\sigma^2(t)}{2} \right] - \lambda e^{-\lambda t} \int_0^t e^{\lambda s} \sigma(s) dw(s) \right] dt + \sigma(t) dw(t)$$

Par simple intégration, on en déduit :

$$K(t) = \int_0^t \left[r(s) - \frac{\sigma^2(s)}{2} \right] ds - \lambda \int_0^t e^{-\lambda \tau} \left[\int_0^\tau e^{\lambda s} \sigma(s) dw(s) \right] d\tau + \int_0^t \sigma(s) dw(s)$$

La deuxième intégrale est calculable et permet une simplification décisive :

$$\begin{aligned} \lambda \int_0^t e^{-\lambda \tau} \left[\int_0^\tau e^{\lambda s} \sigma(s) \right] dw(s) d\tau &= \lambda \int_0^t e^{\lambda s} \left[\int_s^t e^{-\lambda \tau} d\tau \right] \sigma(s) dw(s) \\ &= \int_0^t e^{\lambda s} \left[e^{-\lambda s} - e^{-\lambda t} \right] \sigma(s) dw(s) \\ &= \int_0^t \sigma(s) dw(s) - e^{-\lambda t} \int_0^t e^{\lambda s} \sigma(s) dw(s) \end{aligned}$$

On en déduit :

$$K(t) = \int_0^t \left[r(s) - \frac{\sigma^2(s)}{2} \right] ds + e^{-\lambda t} \int_0^t e^{\lambda s} \sigma(s) dw(s)$$

dont on tire :

$$C(t) = C(0) e^{\int_0^t \left[r(s) - \frac{\sigma^2(s)}{2} \right] ds + e^{-\lambda t} \int_0^t e^{\lambda s} \sigma(s) dw(s)} \quad (22)$$

Comme précédemment, on en tire le processus de capitalisation unitaire

$$\Psi_2(t) = e^{\int_0^t \left[r(s) - \frac{\sigma^2(s)}{2} \right] ds + e^{-\lambda t} \int_0^t e^{\lambda s} \sigma(s) dw(s)} \quad (23)$$

1.2 Flux d'intérêt suivant une courbe de taux

Envisageons le cas d'une situation économique telle que les utilisateurs potentiels de produits financiers considèrent que le taux exigé pour un investissement de durée t est une certaine fonction $S(t)$. Sous cette hypothèse, le résultat futur exigé pour un investissement actuel de montant $C(0)$ sera donné par l'expression :

$$C(t) = C(0)e^{S(t).t} \quad (24)$$

Dans le cas déterministe, l'équation différentielle de capitalisation se met sous la forme :

$$dC(t) = [S(t) + S'(t)t]C(t)dt$$

En incluant une composante aléatoire dans le processus descriptif, on arrive à :

$$dC(t) = [S(t) + S'(t)t]C(t)dt + \sigma(t)C(t)dw(t) \quad (25)$$

L'utilisation d'équations de ce type convient particulièrement aux problèmes d'investissement pour lesquels l'incertitude croît avec le temps. La résolution de (13) se fait de manière classique. Pour varier quelque peu, intégrons de manière tout à fait générale l'expression entre τ et t . On obtient :

$$C(\tau, t) = C(\tau)e^{[S(t)t - S(\tau)\tau]}e^{\int_{\tau}^t \left(\frac{-\sigma^2(s)}{2} \right) ds + \int_{\tau}^t \sigma(s)dw(s)}$$

On constate que comme plus haut, l'expression peut se décomposer en une partie déterministe correspondant à la solution de l'équation différentielle ordinaire, corrigée par une expression qui peut être interprétée comme un processus aléatoire lognormal assorti d'un processus de compensation. Nous montrons ce dernier point au paragraphe suivant. Et comme plus haut, on peut introduire le processus de capitalisation unitaire

$$\Psi_3(t) = e^{[S(t)t]}e^{\int_0^t \left(\frac{-\sigma^2(s)}{2} \right) ds + \int_0^t \sigma(s)dw(s)} \quad (26)$$

Remarquons que le niveau d'incertitude apparaît uniquement lors de la capitalisation dans cette présentation. L'incertitude n'affecte pas directement la courbe de taux. Envisageons à présent le cas d'un processus rendement exigé suivant la dynamique :

$$dS(t) = a(t)dt + \sigma(t)dw(t)$$

Une capitalisation suivant

$$C(t) = C(0)e^{S(t)t}$$

introduit une fonction différente de ce qui a été fait jusqu'ici. En effet, la formule de Itô doit à présent être appliquée pour une fonction

$$K(t) = e^{S(t)t} = e^{Xt}$$

avec :

$$\begin{aligned} K'_t &= X e^{Xt} \\ K'_x &= t e^{Xt} \\ K''_{xx} &= t^2 e^{Xt} \end{aligned}$$

$C(t)$ obéit alors à l'équation :

$$dC(t) = \left[S(t) + a(t)t + \frac{\sigma^2(t)t^2}{2} \right] C(t)dt + \sigma(t)tC(t)dw(t)$$

Un cas particulièrement intéressant est celui où la structure donnée à $dS(t)$ suit un processus de type Ornstein-Uhlenbeck. Dans ce cas, tous les paramètres deviennent interprétables financièrement. Toutefois, l'incertitude sur la modélisation des taux se traduit en moyenne par un rendement à long terme de plus en plus élevé, qui est censé compenser une incertitude de plus en plus forte (volatilité proportionnelle au temps). C'est la raison pour laquelle nous n'adopterons pas ce point de vue dans la suite.

2 Moments des processus de capitalisation

Les processus de capitalisation suivant (5) sont distribués lognormalement. Pour effectuer le calcul des moments de cette distribution, établissons tout d'abord un résultat intermédiaire.

2.1 Résultat préparatoire

Considérons une variable normale X de moyenne nulle et de variance σ^2 : $X = N(0, \sigma^2)$. La densité de cette distribution prend la forme :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

On sait que²⁷ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2.\pi}.\sigma} . e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = 1 \quad (27)$$

Considérons à présent une distribution de type $e^{N(0,\sigma)}$. L'espérance de cette variable lognormale est donnée par :

$$E[e^X] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^x \frac{1}{\sqrt{2.\pi}.\sigma} . e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx$$

En regroupant les exposants de e , de manière à construire un carré parfait, on obtient :

$$\begin{aligned} E[e^x] &= \frac{1}{\sqrt{2.\pi}.\sigma} . \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} . (x^2 - 2x\sigma^2)} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2.\pi}.\sigma} . \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} . (x-\sigma^2)^2} . e^{\frac{\sigma^4}{2\sigma^2}} dx \end{aligned}$$

La dernière exponentielle (correction pour obtenir le carré parfait) est indépendant de x et l'on a, en utilisant (15) et en posant $y = (x - \sigma^2)$:

$$\begin{aligned} E[e^x] &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{\sigma^2}{2}} . \frac{1}{\sqrt{2.\pi}.\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy \\ &= e^{\frac{\sigma^2}{2}} \end{aligned}$$

2.2 Moyenne des processus de capitalisation

2.2.1 Flux divergents

Reprenons le processus (5) et calculons son espérance. La partie stochastique est constituée d'une exponentielle de distribution normale de moyenne nulle (intégrale stochastique) et de variance égale à :

$$\int_0^t \sigma^2(s) ds$$

Conformément au lemme initial, qui vient d'être présenté, l'espérance de cette exponentielle de normale est donnée par :

$$E \left[e^{\int_0^t \sigma(s) dw(s,\omega)} \right] = e^{\frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2(s) ds} \quad (28)$$

²⁷L'intégrale sur la droite réelle d'une distribution normale centrée vaut 1.

On en tire :

$$\begin{aligned} E[C(t)] &= C(0) \cdot e^{\int_0^t \left(r(s) - \frac{\sigma^2(s)}{2} \right) ds} \cdot e^{\frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2(s) ds} \\ &= C(0) \cdot e^{\int_0^t r(s) ds} \end{aligned} \quad (29)$$

On voit apparaître ici clairement la notion que nous avons déjà esquissée de processus perturbateur compensé. La lognormalité du processus perturbateur induisant une tendance, cette dernière doit être anihilée. En effet :

$$E \left[e^{-\int_0^t \frac{\sigma^2(s)}{2} ds} \cdot e^{\frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2(s) ds} \right] = 1$$

On en tire donc :

$$E[\Psi_1(t)] = e^{\int_0^t r(s) ds} \quad (30)$$

2.2.2 Flux stables

Le résultat préparatoire nous conduit sans difficulté au résultat suivant :

$$E[C(t)] = C(0) e^{rt - \frac{\sigma^2 t}{2} + \frac{\sigma^2}{4\lambda} [1 - e^{-2\lambda t}]} \quad (31)$$

Lorsque t croît, la valeur obtenue sera toujours inférieure à celle obtenue sous la modélisation déterministe. Le prix à payer pour la stabilité est évidemment un rendement inférieur au rendement du marché. On a enfin :

$$E[\Psi_2(t)] = e^{rt - \frac{\sigma^2 t}{2} + \frac{\sigma^2}{4\lambda} [1 - e^{-2\lambda t}]} \quad (32)$$

2.2.3 Courbes de taux

Reprenons à présent notre présentation alternative. Le résultat préparatoire conduit immédiatement à :

$$E[C(t, \tau) | C(\tau)] = C(\tau) e^{S(t)t - S(\tau)\tau}$$

Dont on tire :

$$E[C(t)] = C(0) e^{S(t)t}$$

On a donc bien une trajectoire *en moyenne* suivant le processus déterministe correspondant. Nous notons :

$$E[\Psi_3(t)] = e^{S(t)t} \quad (33)$$

2.3 Variance des processus de capitalisation

2.3.1 Processus divergents

Ici encore, le lemme initial nous est d'une grande utilité. On calcule :

$$V[C(t)] = E[C^2(t)] - (E[C(t)])^2$$

La première espérance donne :

$$E[C^2(t)] = C^2(0) \cdot e^{\int_0^t (2r(s) - \sigma^2(s)) ds} \cdot E \left[e^{\int_0^t 2\sigma(s) dw(s, \omega)} \right]$$

En utilisant le lemme, on obtient immédiatement (en posant $\sigma' = 2\sigma$, on vérifie que $\frac{\sigma'^2}{2} = 2\sigma^2$) :

$$\begin{aligned} E[C^2(t)] &= C^2(0) \cdot e^{\int_0^t (2r(s) - \sigma^2(s)) ds} \cdot e^{2 \int_0^t \sigma^2(s) ds} \\ &= C^2(0) \cdot e^{\int_0^t (2r(s) + \sigma^2(s)) ds} \end{aligned}$$

On arrive enfin au calcul de la variance.

$$\begin{aligned} V[C(t)] &= C^2(0) \cdot e^{\int_0^t (2r(s) + \sigma^2(s)) ds} - C^2(0) \cdot e^{\int_0^t 2r(s) ds} \\ &= C^2(0) \cdot e^{\int_0^t 2r(s) ds} \cdot \left[e^{\int_0^t \sigma^2(s) ds} - 1 \right] \end{aligned} \quad (34)$$

Notons enfin :

$$V[\Psi_1(t)] = e^{\int_0^t 2r(s) ds} \left[e^{\int_0^t \sigma^2(s) ds} - 1 \right] \quad (35)$$

On note de même l'écart-type

$$\sigma[\Psi_1(t)] = e^{\int_0^t r(s) ds} \left[e^{\int_0^t \sigma^2(s) ds} - 1 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (36)$$

2.3.2 Flux stables

Les résultats que nous venons d'établir peuvent être synthétisés de la manière qui suit. Considérons une distribution normale de moyenne a et d'écart-type b . Notons X la distribution lognormale construite par passage à l'exponentielle :

$$X = e^{N(a, b)}$$

On en tire :

$$E[X] = e^{a + \frac{b^2}{2}}$$

et

$$V[X] = e^{2a+b^2} [e^{b^2} - 1]$$

Dans le cas du processus de capitalisation unitaire simplifié (r et σ constants)

$$\Psi_2(t) = e^{rt - \frac{\sigma^2 t}{2}} e^{\sigma e^{-\lambda t} \int_0^t e^{\lambda s} dw(s)} \quad (37)$$

On vérifie aisément que

$$a = rt - \frac{\sigma^2 t}{2}$$

$$b = \frac{\sigma^2}{2\lambda} [1 - e^{-2\lambda t}]$$

ce qui permet d'arriver au résultat

2.3.3 Courbes de taux

Qu'en est-il avec notre dernier processus ? On vérifie aisément que le résultat précédent se transforme de la manière qui suit. En horizon $[\tau, t]$, on obtient :

$$V[C(\tau, t)] = C^2(\tau) e^{2(S(t)t - S(\tau)\tau)} \left[e^{\int_{\tau}^t \sigma^2(s) ds} - 1 \right]$$

On en tire pour le processus de capitalisation démarrant à l'instant initial :

$$V[C(t)] = C^2(0) e^{2S(t)t} \left[e^{\int_0^t \sigma^2(s) ds} - 1 \right]$$

et donc :

$$V[\Psi_3(t)] = e^{2S(t)t} \left[e^{\int_0^t \sigma^2(s) ds} - 1 \right]$$

Rappelons que cette dernière description est construite sur base de l'hypothèse que la variabilité modélisée ici par un mouvement brownien standard, affecte la dynamique de croissance du capital et non celle de la modélisation des taux de capitalisation. Cette autre hypothèse conduit à un autre modèle. En effet, pour introduire un processus de capitalisation basé sur l'hypothèse que l'incertitude entâche l'évolution des taux de rendement, il faut travailler avec l'équation modélisant la dynamique des taux :

$$dS(t) = a(t)dt + \sigma(t)dw$$

Nous avons expliqué plus haut pourquoi nous ne suivions pas cette voie.

3 Moments d'ordre quelqconque

Il est assez aisé de calculer les moments non centrés d'ordre quelconque pour les processus de capitalisation. Considérons tout d'abord le cas classique et posons :

$$g(t) = E[C^k(t)] = C^k(0)e^k \int_0^t [r(s) - \frac{\sigma^2(s)}{2}] ds E \left[e^{k \int_0^t \sigma(s) ds} \right]$$

En posant $\sigma^*(s) = k\sigma(s)$, et en utilisant toujours notre résultat préparatoire (16), on arrive à :

$$E[C^k(t)] = C^k(0)e^k \int_0^t [r(s)] du E \left[e^{\frac{k^2-k}{2} \int_0^t \sigma^2(s) ds} \right] \quad (38)$$

en effet, de (16), à savoir

$$E \left[e^{\int_0^t \sigma(s) dw(s, \omega)} \right] = e^{\frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2(s) ds}$$

on tire en posant $\sigma^*(s) = k\sigma(s)$:

$$E \left[e^{\int_0^t k\sigma(s) dw(s, \omega)} \right] = e^{\frac{1}{2} \int_0^t k^2 \sigma^2(s) ds}$$

Et donc immédiatement le résultat annoncé. On vérifie aisément que cette relation se réduit aux résultats annoncés dans le cas $k = 2$.

4 Calcul des covariances entre processus de capitalisation

Dans ce paragraphe, nous allons considérer deux investissements successifs C_1 et C_2 effectués respectivement aux instants t_1 et t_2 avec ($t_1 < t_2$) dans le même fonds de placement. Pour tout instant t postérieur à t_2 , les deux investissements vont donc subir le même facteur de risque pendant une durée $t - t_2$.

Il semble donc intuitif de considérer que les valeurs acquises $C_1(t)$ et $C_2(t)$ soient corrélées.

4.1 Flux divergents

Introduisons les notations

$$C_1(t) = C_1 e^{\int_{t_1}^t r(s)ds} e^{\int_{t_1}^t \sigma(s)dw(s,\omega) - \int_{t_1}^t \frac{\sigma^2(s)}{2} ds}$$

et

$$C_2(t) = C_2 e^{\int_{t_2}^t r(s)ds} e^{\int_{t_2}^t \sigma(s)dw(s,\omega) - \int_{t_2}^t \frac{\sigma^2(s)}{2} ds}$$

représentant les équations d'évolution dans le même fonds de nos deux investissements et calculons l'espérance du produit :

$$E[C_1(t) \times C_2(t)]$$

Il convient de décomposer les intégrales de t_1 à t en sommes d'intégrales de t_1 à t_2 et de t_2 à t . Cette façon de faire permet d'arriver au calcul de l'espérance d'un produit de deux variables indépendantes et donc de passer au produit des espérances. On calcule :

$$\begin{aligned} E[C_1(t)C_2(t)] &= C_1 C_2 e^{\int_{t_1}^{t_2} [r(s) - \frac{\sigma^2(s)}{2}] ds} e^{\int_{t_2}^t [2r(s) - \sigma^2(s)] ds} \\ &\quad \times E \left[e^{\int_{t_1}^{t_2} \sigma(s)dw(s)} e^{\int_{t_2}^t 2\sigma(s)dw(s)} \right] \end{aligned}$$

Les processus de Wiener étant à accroissements indépendants, les deux intégrales constituent deux variables indépendantes. On arrive à :

$$\begin{aligned} E[C_1(t)C_2(t)] &= C_1 C_2 e^{\int_{t_1}^{t_2} [r(s) - \frac{\sigma^2(s)}{2}] ds} e^{\int_{t_2}^t [2r(s) - \sigma^2(s)] ds} \\ &\quad \times E \left[e^{\int_{t_1}^{t_2} \frac{\sigma^2(s)}{2} ds} e^{\int_{t_2}^t 2\sigma^2(s) ds} \right] \\ &= C_1 C_2 e^{\int_{t_1}^{t_2} r(s) ds} e^{\int_{t_2}^t [2r(s) + \sigma^2(s)] ds} \end{aligned}$$

On en tire évidemment la covariance :

$$\begin{aligned} COV[C_1(t)C_2(t)] &= C_1 C_2 e^{\int_{t_1}^{t_2} r(s) ds} e^{\int_{t_2}^t [2r(s) + \sigma^2(s)] ds} \\ &\quad - C_1 C_2 e^{\int_{t_1}^{t_2} r(s) ds} e^{\int_{t_2}^t 2r(s) ds} \\ &= C_1 C_2 e^{\int_{t_1}^{t_2} r(s) ds} e^{\int_{t_2}^t 2r(s) ds} \left[e^{\int_{t_2}^t \sigma^2(s) ds} - 1 \right] \end{aligned}$$

On vérifie ici que la covariance entre les valeurs acquises de deux investissements successifs dans le même fonds (et donc subissant la même

source de risque), ne fait intervenir la volatilité que sur l'intervalle pendant lequel les deux investissements subissent simultanément son influence. Notons

$$\sigma[C_1(t)] = C_1 e^{\int_{t_1}^t r(s)ds} \left[e^{\int_{t_1}^t \sigma^2(s)ds} - 1 \right]^{\frac{1}{2}}$$

et

$$\sigma[C_2(t)] = C_1 e^{\int_{t_2}^t r(s)ds} \left[e^{\int_{t_2}^t \sigma^2(s)ds} - 1 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Et calculons la corrélation entre nos deux investissements successifs :

$$\rho[C_1(t)C_2(t)] = \frac{COV[C_1(t)C_2(t)]}{\sigma[C_1(t)]\sigma[C_2(t)]}$$

Explicitement, on arrive à :

$$\begin{aligned} \rho[C_1(t)C_2(t)] &= \frac{\left[e^{\int_{t_2}^t \sigma^2(s)ds} - 1 \right]}{\left[e^{\int_{t_1}^t \sigma^2(s)ds} - 1 \right]^{\frac{1}{2}} \left[e^{\int_{t_2}^t \sigma^2(s)ds} - 1 \right]^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{\left[e^{\int_{t_2}^t \sigma^2(s)ds} - 1 \right]^{\frac{1}{2}}}{\left[e^{\int_{t_1}^t \sigma^2(s)ds} - 1 \right]^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

On remarquera que cette expression dépend explicitement de la volatilité sur la totalité de l'intervalle $[t_1, t[$ et non uniquement sur $[t_2, t[$. Les résultats demeurent interprétables. On vérifie entre autres que :

$$\lim_{t_1 \rightarrow t_2} \rho[C_1(t)C_2(t)] = 1$$

ce qui est intuitivement clair. Considérons à présent le cas de la volatilité constante. Posons :

$$\sigma(s) = \sigma \quad \forall s \in [t_1, \infty[$$

L'expression précédente se calcule aisément. On obtient :

$$\rho[C_1(t)C_2(t)] = \frac{\left[e^{\sigma^2(t-t_2)} - 1 \right]^{\frac{1}{2}}}{\left[e^{\sigma^2(t-t_1)} - 1 \right]^{\frac{1}{2}}}$$

Le coefficient de détermination $D = \rho^2$ peut alors être vu comme une fonction du carré de la volatilité $a = \sigma^2$. On note :

$$D = \rho^2(t_1, t_2, a) = \frac{e^{a(t-t_2)} - 1}{e^{a(t-t_1)} - 1}$$

On peut alors voir l'univers déterministe comme la limite pour a tendant vers 0 (disparition de la volatilité) de l'univers stochastique. Ceci introduit un lien entre investissements successifs. On vérifie que :

$$\lim_{a \rightarrow 0} \rho^2(t_1, t_2, a) = \frac{t - t_2}{t - t_1}$$

Si l'aspect mathématique sous-tendant les démonstrations de ces propriétés est évidente, il n'en va pas de même pour leur interprétation. Le lien que nous venons de mettre en évidence est arbitraire. D'autres hypothèses vont mener à une relation différente comme le montre le paragraphe suivant.

4.1.1 Flux liés à des courbes de taux

Reprenons notre idée d'un processus *courbe de rendement* suivant la dynamique :

$$dS(t) = a(t)dt + \sigma dw(t)$$

dans lequel $a(t)$ mesure les variations instantanées du taux à utiliser pour une échéance légèrement différente de l'instant t considéré. Dans le cas évoqué plus haut d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck, on a par exemple :

$$a(t) = -\lambda[R - S(t)]$$

expression dans laquelle R représente le taux long terme à atteindre et λ la vitesse de réaction du processus *taux*.

Dans ce contexte, considérons à présent le processus de capitalisation

$$\Psi_4(t) = e^{S(t)t}$$

L'équation différentielle stochastique décrivant ce processus s'obtient immédiatement à partir de la formule de Itô. On a en effet :

$$F(X, t) = e^{Xt}$$

et donc :

$$F'_t = X e^{Xt} = S(t) \Psi_4(t)$$

$$F'_X = te^{Xt} = t\Psi_4(t)$$

$$F'_{XX} = t^2e^{Xt} = t^2\Psi_4(t)$$

Le processus de capitalisation obéit donc à l'équation :

$$d\Psi_4(t) = \left[S(t) + a(t)t + \frac{\sigma^2 t^2}{2} \right] \Psi_4(t) + \sigma t \Psi_4(t) dw(t)$$

qui est un cas particulier de (2) avec

$$r(t) = \left[S(t) + a(t)t + \frac{\sigma^2 t^2}{2} \right]$$

et

$$\sigma(t) = \sigma t$$

De la relation générale de corrélation

$$\rho[C_1(t)C_2(t)] = \frac{\left[e^{\int_{t_2}^t \sigma^2(s)ds} - 1 \right]^{\frac{1}{2}}}{\left[e^{\int_{t_1}^t \sigma^2(s)ds} - 1 \right]^{\frac{1}{2}}}$$

on peut tirer :

$$\rho[C_1(t)C_2(t)] = \frac{\left[e^{\int_{t_2}^t \sigma^2 s^2 ds} - 1 \right]^{\frac{1}{2}}}{\left[e^{\int_{t_1}^t \sigma^2 s^2 ds} - 1 \right]^{\frac{1}{2}}}$$

et donc :

$$\rho[C_1(t)C_2(t)] = \frac{\left[e^{\frac{\sigma^2}{3}[t^3 - t_2^3]} - 1 \right]^{\frac{1}{2}}}{\left[e^{\frac{\sigma^2}{3}[t^3 - t_1^3]} - 1 \right]^{\frac{1}{2}}}$$

En posant comme plus haut $a = \sigma^2$, et en calculant la limite de l'expression pour a tendant vers 0 (disparition de la stochasticité), on obtient cette fois :

$$\lim_{a \rightarrow 0} \rho^2(t_1, t_2, a) = \frac{t^3 - t_2^3}{t^3 - t_1^3}$$

5 Processus d'actualisation

5.1 Définition formelle

A tout processus d'actualisation on peut associer formellement un processus d'actualisation. Nous nous limiterons ici au cas des processus flux d'intérêt divergents. De

$$C(t) = C(0)\Psi(t)$$

on tire :

$$C(0) = C(t)\Psi^{-1}(t) = C(t)\varphi(t)$$

C'est le cas notamment pour les contrats pour lesquels l'engagement est pris par l'organisme de banque/assurances de verser au client à l'instant t un montant connu aujourd'hui $C(t)$. Le processus d'actualisation permet de répondre à la question : quelle est alors la valeur actuelle de cet engagement ?

Dans le cas des flux divergents, on a :

$$\varphi(t) = e^{\int_0^t -[r(s) - \frac{\sigma^2(s)}{2}]ds} e^{-\int_0^t \sigma(s)dw(s)}$$

Etudions les moments de ce processus.

5.2 Moments des processus d'actualisation

Dans le cas des flux d'intérêts cumulés divergents, on doit calculer :

$$E[\varphi(t)] = e^{\int_0^t -[r(s) - \frac{\sigma^2(s)}{2}]ds} E \left[e^{-\int_0^t \sigma(s)dw(s)} \right]$$

On vérifie que, comme plus haut:

$$E \left[e^{-\int_0^t \sigma(s)dw(s)} \right] = e^{\frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2(s)ds}$$

On en déduit immédiatement:

$$E[\varphi(t)] = e^{\int_0^t -[r(s) - \sigma^2(s)]ds}$$

Une propriété essentielle apparaît ici : l'irréversibilité du temps. La capitalisation (évolution du passé vers le futur) se fait en moyenne au taux du marché. Par contre l'actualisation (évolution du futur vers le

passé) se fait à un taux plus faible. Ce résultat s'interprète facilement : lorsque le capital futur est connu, ce dernier représente un engagement. Dans un univers risqué, cet engagement doit toujours être surévalué. Il convient donc de l'actualiser à un taux plus bas de façon à accroître sa valeur actuelle.

D'une manière équivalente à ce qui a été fait plus haut, on peut calculer les moments non centrés d'ordre quelconque du processus d'actualisation.

On a :

$$E[\varphi^k(t)] = e^{-k \int_0^t [r(s) - \frac{\sigma^2(s)}{2}] ds} E \left[e^{-k \int_0^t \sigma(s) dw(s)} \right]$$

On calcule comme avant :

$$E \left[e^{-k \int_0^t \sigma(s) dw(s)} \right] = e^{\frac{k^2}{2} \int_0^t \sigma^2(s) ds}$$

On obtient enfin :

$$\begin{aligned} E[\varphi^k(t)] &= e^{-k \int_0^t [r(s) - \frac{\sigma^2(s)}{2}] ds} e^{\frac{k^2}{2} \int_0^t \sigma^2(s) ds} \\ &= e^{-k \int_0^t r(s) ds} e^{\frac{k^2+k}{2} \int_0^t \sigma(s) dw(s)} \end{aligned}$$

On en tire en particulier :

$$\begin{aligned} E[\varphi_0^2(t)] &= e^{\int_0^t [-2r(s) + 3\sigma^2(s)] ds} \\ V[\varphi_0(t)] &= e^{\int_0^t [-2r(s) + 2\sigma^2(s)] ds} \left[e^{\int_0^t \sigma^2(s) dw(s)} - 1 \right] \end{aligned}$$

5.3 Covariances entre deux processus d'actualisation

Nous effectuons les calculs à l'instant $t = 0$. Les deux flux calculés à cet instant sont supposés d'échéances respectives t_1 et t_2 ($t_1 \leq t_2$). On calcule pour commencer:

$$\begin{aligned} E[\varphi(t_1), \varphi(t_2)] &= e^{-\int_0^{t_1} [r(s) - \frac{\sigma^2(s)}{2}] ds} e^{-\int_0^{t_2} [r(s) - \frac{\sigma^2(s)}{2}] ds} * \\ &E \left[e^{-\int_0^{t_1} \sigma(s) dw(s)} e^{-\int_0^{t_2} \sigma(s) dw(s)} \right] \end{aligned}$$

Notons I cette dernière espérance et calculons:

$$\begin{aligned} I &= E \left[e^{-\int_0^{t_1} \sigma(s) dw(s)} e^{-\int_0^{t_1} \sigma(s) dw(s) - \int_{t_1}^{t_2} \sigma(s) dw(s)} \right] \\ &= E \left[e^{-2 \int_0^{t_1} \sigma(s) dw(s)} e^{-\int_{t_1}^{t_2} \sigma(s) dw(s)} \right] \end{aligned}$$

Les deux intégrales stochastiques apparaissant dans cette dernière expression sont indépendantes (attention au coefficient de σ). On a :

$$\begin{aligned} I &= E \left[e^{-2 \int_0^{t_1} \sigma(s) dw(s)} \right] E \left[e^{-\int_{t_1}^{t_2} \sigma(s) dw(s)} \right] \\ &= e^{\int_0^{t_1} 2\sigma^2(s) ds} e^{\int_{t_1}^{t_2} \frac{\sigma^2(s)}{2} ds} \end{aligned}$$

On en tire enfin la covariance :

$$\begin{aligned} COV[\varphi(t_1), \varphi(t_2)] &= e^{-\int_0^{t_1} [r(s) - \frac{\sigma^2(s)}{2}] ds} e^{-\int_0^{t_2} [r(s) - \frac{\sigma^2(s)}{2}] ds} * \\ &\quad e^{\int_0^{t_1} 2\sigma^2(s) ds} e^{\int_{t_1}^{t_2} \frac{\sigma^2(s)}{2} ds} - \\ &\quad e^{\int_0^{t_1} [-r(s) + \sigma^2(s)] ds} e^{\int_0^{t_2} [-r(s) + \sigma^2(s)] ds} \end{aligned}$$

En décomposant les intégrales de 0 à t_2 en deux intégrales de 0 à t_1 et de t_1 à t_2 , on arrive à l'expression :

$$\begin{aligned} COV[\varphi(t_1), \varphi(t_2)] &= e^{\int_0^{t_1} [-2r(s) + 2\sigma^2(s)] ds} e^{\int_{t_1}^{t_2} [-r(s) + \sigma^2(s)] ds} \\ &\quad \left[e^{\int_0^{t_1} \sigma^2(s) ds} - 1 \right] \end{aligned}$$

Le calcul du coefficient de corrélation se fait de manière identique.