Introduction à la finance stochastique sans le recours aux équations différentielles stochastiques

Daniel Justens

HEFF/Économique Type Long “Cooremans”
IREM de bruxelles
Place Anneessens, 11 - 1000 Bruxelles - Belgique
Courriel : daniel.justens@he-ferrer.be

1 Introduction

Le monde financier actuel met à la disposition de ses clients une gamme de plus en plus étendue de produits dits *dérivés*. Les modèles permettant la valorisation de produits de ce type sont relativement sophistiqués et les mathématiques sous-jacentes à leur construction généralement mal connues ou insuffisamment maîtrisées.

Nous proposons ici une mise en équation intuitive et progressive des produits dits *sous-jacents*, aboutissant à la construction de distributions d'actifs prenant la forme explicite de distributions lognormales, tout-à-fait en accord avec les résultats obtenus au moyen de brownien géométrique et autorisant de ce fait un ajustement paramétrique. Le tout est obtenu sans recours aux équations différentielles stochastiques et sans un formalisme excessif.

Des exemples numériques sont présentés afin de montrer l'adéquation du modèle à la réalité. Une introduction à la théorie de la valorisation des options est alors possible en optant pour la description de Cox Ross et Rubinstein. Cette dernière est présentée et illustrée au moyen d'exemples numériques.

2 Description du problème

Notre but est la description d'un actif financier en univers aléatoire, subissant à tout moment des *chocs*, des mouvements en apparence chaotiques. C'est effectivement le cas de la grande majorité des actifs évalués en permanence dans les grandes bourses mondiales. Pour ce faire, nous procédons en trois temps :

- description du processus tendance sous la forme d'une équation différentielle ordinaire ;

- construction de processus bruits blancs additifs et multiplicatifs. Pour ces derniers, le recours à un processus de compensation est nécessaire ;
- construction d'un processus descriptif adoptant la forme du produit d'un processus déterministe continu et différentiable et d'un processus perturbateur compensé. On constate que ce dernier coïncide avec le modèle usuel obtenu au moyen d'un brownien géométrique après utilisation du lemme de Itô.

Convenons de noter $C(t,\omega)$ la fonction permettant de donner une description probabiliste de la valeur d'un capital quelconque, en univers quelconque à l'instant futur t (réel positif) étant donné la valeur supposée connue de ce capital $C(0)$ en un instant $t = 0$ appelé *présent*.

Nous rappelons dans un premier temps le modèle déductif général en univers déterministe afin de le corriger, de l'affiner, en fait de le *compléter* dans le contexte aléatoire.

3 Modélisation exponentielle : approche déductive

Considérons un capital quelconque à l'instant particulier (échéance du capital) auquel ce capital est parfaitement connu. Nous notons comme plus haut :

$$C_0 = C(0)$$

Pour arriver à une description réaliste de la représentation de l'évolution d'un capital au cours du temps, on peut lui imposer deux conditions qui semblent n'offrir aucun caractère restrictif. Nous verrons plus loin que les choses sont un peu plus complexes.

Condition C_1
On suppose que l'accroissement d'un capital est proportionnel au capital lui-même.

Cette condition est réaliste. Quelles que soient les conditions du placement (bancaires, en obligations ou même en actions), les variations de capital (intérêt, ou perte en cas de placement boursier) sont proportionnelles à celui-ci. En investissant dix fois plus, on gagne ou on perd dix fois plus.

Condition C_2
On suppose que cet accroissement est également proportionnel au temps écoulé. Un placement plus long doit être rémunéré davantage.

L'universalité de la condition C_2 n'est pas aussi évidente. Elle n'a de sens qu'à très court. Ce point justifie par ailleurs le passage à la limite qui va intervenir dans la mise en équation qui suit et montre que ce dernier constitue un *accroissement de la validité* du modèle et non un jeu mathématique.

On peut montrer que cette condition, équivalente à la dérivabilité, impose un contexte déterministe. L'univers aléatoire ne permet pas l'utilisation des équations différentielles ordinaires.

Considérons le temps t comme la variable et un point t_0 situé dans un intervalle ouvert inclus dans le domaine de définition d'une fonction f. Lorsque la limite de

$$\frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$$

existe et est finie pour Δt tendant vers 0, la fonction est dérivable en t_0. Aucune hypothèse n'est faite quant au signe de Δt. Lorsque la fonction f est dérivable, la limite à gauche du rapport (Δt négatif) est égale à sa limite à droite (Δt positif) et ce en tout point.

On a donc pour tout Δt appartenant à un certain voisinage de t_0 :

$$f'(t_0) \approx \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$$

que l'on peut encore noter :

$$f(t_0 + \Delta t) \approx f(t_0) + f'(t_0).\Delta t$$

La dérivabilité de f implique que sa dérivée au point t_0 peut être calculée à partir des seules observations passées[1]. On peut donc estimer la valeur future de la fonction $f(t_0 + \Delta t)$ à partir de valeurs présentes $f(t_0)$ et situées dans un passé proche $f'(t_0)$, ce qui implique une prévisibilité (linéaire) locale, et donc un contexte déterministe.

On vérifie également que la dérivabilité implique bien la proportionnalité des accroissements de capital aux variations de l'horizon. On peut écrire en effet :

$$f(t_0 + \Delta t) - f(t_0) = \Delta f \approx f'(t_0).\Delta t$$

Comme plus haut, $C(t)$ représente un capital au temps t et l'on note $C(0) = C_0$ sa valeur en l'instant $t = 0$ où le capital est connu.

Notons $r(t)$ le coefficient de proportionnalité intervenant dans les deux conditions imposées. L'accroissement de capital entre t et $t + \Delta t$ est donc :

$$C(t + \Delta t) - C(t) = \Delta C = r(t).\Delta t.C(t).$$

[1]En calcul des probabilités, l'univers pour lequel le présent est accessible à partir du passé proche est probabilisé au moyen d'une σ-algèbre prévisible, par opposition à la σ-algèbre optionnelle. Ainsi lorsque des discontinuités sont admises dans le modèle, on fait la différence entre fonctions continues à gauche et donc prévisibles et fonctions continues à droite. Comme nous l'avons déjà fait remarquer, ce sont malheureusement ces dernières qui modélisent objectivement la réalité.

On en tire :

$$\frac{\Delta C}{\Delta t} = r(t).C(t).$$

et donc, après un passage à la limite pour Δt tendant vers 0, qui accroît la validité du modèle :

$$C'(t) = r(t).C(t).$$

Cette équation à variables séparées se résoud aisément et l'on obtient successivement :

$$\begin{aligned}
\frac{dC}{C} &= r(t)dt \\
d[\ln C] &= r(t)dt \\
[\ln C]_0^t &= \int_0^t r(s)ds \\
C(t) &= C(0).e^{\int_0^t r(s)ds}.
\end{aligned}$$

Lorsque le taux est constant et noté r, on trouve la relation connue sous le nom de *capitalisation continue* :

$$C(t) = C(0) \cdot e^{r.t}. \tag{1}$$

La constance d'un paramètre en gestion a une signification bien particulière. Elle traduit le manque d'information disponible quant à ses variations futures[2].

4 Passage à l'univers stochastique

Envisageons à présent une description de l'évolution d'un capital dans un contexte aléatoire, en considérant par exemple l'évolution d'un actif boursier pendant une séance de cotations. Pour modéliser le plus simplement possible les petites fluctuations aléatoires observées régulièrement pour un actif de ce type, on fait appel à la notion de *promenade* ou *marche aléatoire*. C'est cette notion que nous présentons intuitivement et formellement.

4.1 Formalisation théorique préliminaire

Sous sa forme la plus élémentaire, une marche aléatoire décrit le trajet parcouru par une personne se déplaçant sur un axe vertical orienté, en partant de l'origine de l'axe à l'instant initial, ses pas, tous de longueur unitaire, étant effectués aléatoirement et indépendamment tantôt vers le haut (événement noté ω_1), tantôt vers le bas (événement noté ω_2) avec probabilités identiques 0.5.

[2]En univers probabiliste, la constante est remplacée par la notion de *martingale*, un processus pour lequel les espérance conditionnelles sont constantes.

Le k^{eme} pas (k = 1, 2, ... , n) est décrit par une variable aléatoire X_k probabilisée comme suit :

$$\begin{aligned} X_k(\omega_1) &= +1 \quad \text{avec probabilité } 0.5 \\ X_k(\omega_2) &= -1 \quad \text{avec probabilité } 0.5 \end{aligned}$$

L'espérance mathématique[3] de X_k vaut :

$$E[X_k] = 0.5 - 0.5 = 1$$

ce qui traduit dans cette modélisation simpliste l'absence de tendance. La variance est égale à :

$$V[X_k] = 0.5 + 0.5 = 1$$

La position du *marcheur* après n pas peut être représentée par une variable aléatoire S_n qui est la somme de n variables aléatoires indépendantes et équidistribuées X_k pour $k = 1, 2, ..., n$. On a :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

L'espérance mathématique de cette variable aléatoire S_n est bien entendu nulle puisque :

$$E[S_n] = \sum_{k=1}^{n} E[X_k] = 0$$

Sa variance est donnée par :

$$V[S_k] = \sum_{k=1}^{n} V[X_k] = n$$

étant donné l'hypothèse d'indépendance. L'écart-type est donc égal à la racine carrée du nombre de pas.

Ainsi, lorsqu'il accomplit n pas, le marcheur peut décrire 2^n trajectoires différentes mais équiprobables. Chacune de ces trajectoires peut être visualisée dans un plan en portant en abscisses les numéros k des pas et en ordonnées les positions correspondantes du marcheur sur l'axe vertical. En reliant les points ainsi obtenus par des segments de droite, on détermine une *courbe* continue[4], affine par morceaux, présentant de nombreux points angulaux répartis aléatoirement au voisinage de la valeur centrale 0.

[3]Une généralisation de la moyenne qui dans ce cas correspond à cette dernière

[4]La continuité construite ici est purement formelle. On pourrait considérer les trajectoires comme des fonctions en escaliers, une vision plus proche de ce qui est réellement observée en matières boursières où les valeurs d'actifs gardent une valeur constante pendant un intervalle de temps relativement court pour *sauter* vers la valeur suivante en fonction de l'offre et de la demande instantanées

Pour information, on simule aisément ce type de marche en remarquant que la variable x_k qui vient d'être définie peut être obtenue à partir de la distribution uniforme[5] sur $[0, 1[$ au moyen de la formule :

2 * ARRONDI(ALEA();0) - 1

On obtient alors la variable S_n par simple sommation. Assez curieusement, on remarque que le fait de simuler une variable de tendance nulle n'implique nullement que sa trajectoire oscillera autour de 0. Bien au contraire, des tendances à la hausse ou à la baisse apparaîtront régulièrement, parfois même de manière régulière. On le voit bien dans les deux exemples qui suivent, obtenus au moyen de la procédure qui vient d'être décrite et qui présentent respectivement une tendance régulière à la baisse et à la hausse.

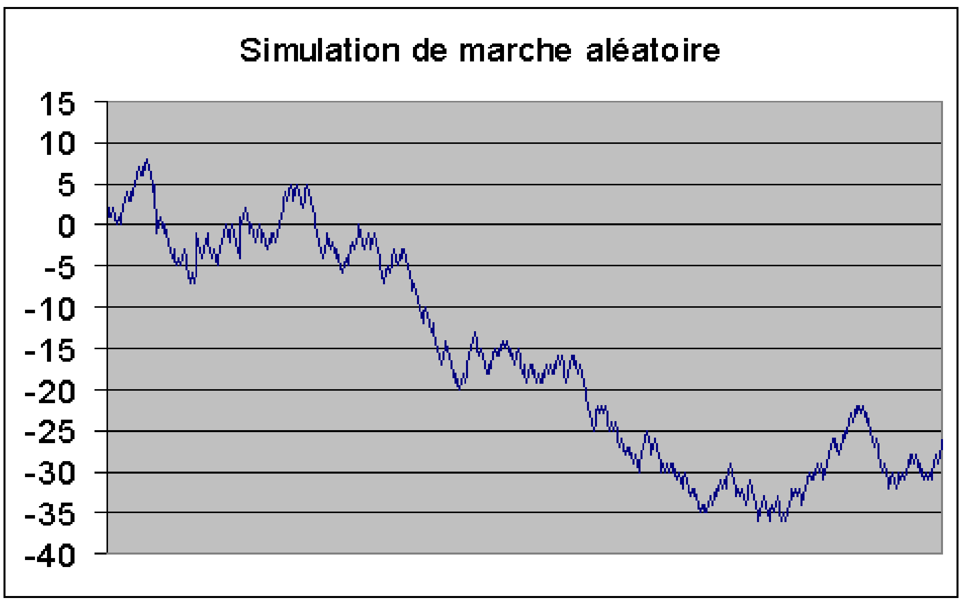


Figure 1: Réalisation de promenade aléatoire de tendance nulle présentant une tendance à la baisse

En mettant sur le processus une tendance nulle, on traduit tout simplement l'absence totale de renseignements préalables quant aux observations futures. Comme toujours en économie, le recours à une description simple traduit toujours une méconnaissance de la réalité.

[5] représentée en langage excell par la fonction ALEA()

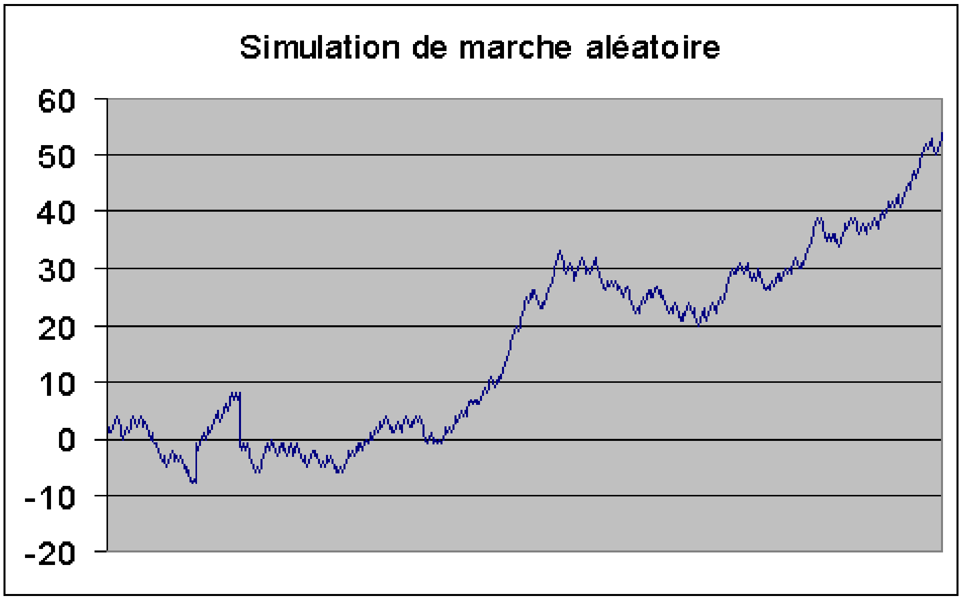


Figure 2: Réalisation de promenade aléatoire de tendance nulle présentant une tendance à la hausse

4.2 Point de vue financier : une première approche

Adaptons ce qui vient d'être présenté au contexte financier. A cet effet, considérons une action dont les variations à court terme au voisinage de la tendance sont essentiellement aléatoires[6] et indépendantes. Supposons que la cotation puisse subir toutes les minutes ou, plus généralement, toutes les Δt unités de temps, soit une augmentation (événement ω_1), soit une diminution (événement ω_2) d'une valeur constante notée Δx, les deux événements étant supposés équiprobables[7].

Tout se passe comme si les valeurs de cet actif simplifié effectuaient une marche aléatoire au départ de sa valeur initiale C_0, dont la longueur de pas vaut toujours Δx, chaque pas étant effectué toutes les Δt unités de temps.

Considérons la valeur de cette action après t unités de temps pour tout $t = n.\Delta t$. On

[6] Il convient d'interpréter ce que nous entendons par ce terme. Nous considérons des variations dont ni l'ampleur ni la distribution ne peuvent être approchées de manière rationnelle *a priori*. On se contente donc d'une description *type*, arbitraire, tenant compte de l'information disponible et économiquement acceptable, en sachant que la réalité observée sera, quelle que soit cette description type, généralement différente de ce qui a été modélisé. L'important ici est la prise en compte de la variabilité.

[7] Ce point traduit notre absence d'information quant à la tendance ou la volonté de ne modéliser que les fluctuations *imprévisibles*, celles pour lesquelles on n'a pas d'information.

construit ainsi une variable aléatoire notée C_t représentée par :

$$C_t = C_0 + \sum_{k=1}^{n} X_k$$

où les X_k sont identiques, indépendantes et équidistribués définies par :

$$\begin{aligned} X_k(\omega_1) &= +\Delta x \quad \text{avec probabilité } 0.5 \\ X_k(\omega_2) &= -\Delta x \quad \text{avec probabilité } 0.5 \end{aligned}$$

On a aussi $(k = 1, ..., n)$:

$$X_k = C_k - C_{k-1}$$

Les variables X_k étant de moyenne nulle et décart-type égal à Δx[8], et étant supposées indépendantes, on obtient :

$$\begin{aligned} E[C_t] &= C_0 \\ V[C_t] &= n(\Delta x)^2 = t.\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} \end{aligned}$$

Dans ce contexte, la meilleur prévision que l'on puisse donner de l'actif au temps t est égale à la valeur de cet actif à l'instant initial. C'est la notion de *martingale*. Ceci est paradoxalement assez réaliste : la considération d'un actif à risque pendant un temps très court ne nous renseigne absolument pas sur la tendance de cet actif. La seule partie visible de ses variations participe de ce que l'on va appeler sa *volatilité*.

On constate que la variance de la variable C_t est proportionnelle à la durée t de l'intervalle considéré $[0, t[$ et que son écart-type[9] est quantà lui proportionnel ła racine carrée de t. L'amplitude des variations aléatoires se mesure donc en fonction de la racine carrée du temps écoulé. C'est ce coefficient de proportionnalité que l'on définira comme la volatilité de l'actif.

Formalisons quelque peu ce qui précède. Le processus décrit ci-dessus peut être vu comme un schéma de Bernoulli consistant à répéter n expériences aléatoires dichotomiques identiques (à savoir hausse ou baisse de l'actif dans le cas qui nous concerne), indépendantes[10] et équidistribuées. L'hypothèse de l'absence d'information conduit à mettre une distribution uniforme sur la hausse ou la baisse. Désignons par ξ_t le nombre de hausses de l'action pendant l'intervalle $[0, t[$ $(t = n.\Delta t)$. ξ_t admet une distribution binomiale $B(n, \frac{1}{2})$. Comme le nombre de baisses vaut $n - \xi_t$, la valeur de l'action au temps $t = n.\Delta t$ est donnée par :

$$C_t = C_0 + [\xi_t - (n - \xi_t)]\Delta x = (2\xi_t - n)\Delta x$$

[8]Calculs identiques à ce qui a été vu plus haut

[9]Une des mesures les plus courantes de la variabilité d'un phénomène

[10]L'indépendance des variables X_k traduit ici notre volonté de ne modéliser que l'*imprévisible*. Les renseignements obtenus soit par observation de l'actif (analyse quantitative), soit par considération du contexte économique (analyse qualitative) participent d'une autre description.

Observons encore que la variable aléatoire centrée réduite η_t, correspondant à ξ_t est égale à :

$$\begin{aligned}\eta_t &= \frac{\xi_t - \frac{n}{2}}{\sqrt{n.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}}} = \frac{2\xi_t - n}{\sqrt{n}} = \frac{C_t - C_0}{\Delta x\sqrt{n}} \\ &= \frac{\sqrt{\Delta t}}{\Delta x}.\frac{C_t - C_0}{\sqrt{t}}\end{aligned}$$

Poursuivons notre raisonnement en tendant vers une description en temps continu. Il n'est pas irréaliste de supposer que les hausses ou baisses d'un actif financier puissent intervenir à tout instant. Ainsi pour traduire la continuité de l'univers réel allons-nous naturellement passer à la limite lorsque Δt tend vers 0, ce qui revient à dire que, pour t fixé, n va tendre vers l'infini.

S'il semble acceptable dans le cadre d'une description qui se veut continue[11], d'admettre que la variation Δx tende vers 0 en même temps que Δt, une hausse ou une baisse ne pouvant qu'être minime sur un intervalle de temps très petit, il n'est pas réaliste de choisir Δx proportionnel à Δt. Le phénomène *évolution d'un actif boursier* cesserait d'être aléatoire puisque sa variance $V[C_t]$ tendrait vers zéro lorsque n deviendrait infiniment grand.

De manière à conserver la limite une variance non nulle au phénomène, on peut supposer $(\Delta x)^2$ proportionnel à Δt et poser :

$$\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} = \sigma$$

ou encore par souci de standardisation :

$$\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} = 1$$

Comme la variable aléatoire ξ_t (égale au nombre de hausses de l'actif pendant l'intervalle $[0, t[$, avec $t = n.\Delta t$) suit une distribution binomiale $B(n, \frac{1}{2})$, le théorème de Moivre-Laplace permet d'affirmer que la variable centrée réduite η_t correspondante suit asymptotiquement[12] une loi normale $N(0, 1)$.

Sous l'hypothèse de standardisation, $\Delta x = \sqrt{\Delta t}$, η_t coïncide avec la variable $\frac{C_t}{\sqrt{t}}$. En conséquence, à la limite, C_t suit une loi normale de moyenne égale à C_0 et d'écart-type égal à la racine du temps.

[11]Une description avec sauts est possible dans le cadre de la théorie beaucoup plus complexe des semimartingales.

[12]C'est-à-dire que la fonction de répartition de cette variable converge (au sens de la convergence des fonctions) vers la fonction de répartition normale de moyenne nulle et d'écart-type unité

Considérons à présent les accroissements de notre actif C_t. Nous avons construit une *promenade aléatoire instantanée*, puisqu'il s'agit d'une marche aléatoire avec passage à la limite, les pas de la marche s'effectuant de façon continue. Il s'agit d'un *processus stochastique*, ou phénomène évoluant aléatoirement au fil du temps, suivant une loi normale d'éspérance nulle et de variance proportionnelle au temps (ou égale au temps en cas de standardisation). Les accroissements $C_{\tau+1} - C_\tau$ sont par construction indépendants et équidistribués, quel que soit τ.

Lorsque les variations observées de l'actif ne sont pas *rigoureusement égale* à la racine carrée du temps, elles seront en général *proportionnelles* à cette racine carrée. Le coefficient de proportionnalité porte alors le nom de *volatilité*.

4.3 Passage au processus multiplicatif

Dans la description que nous venons de fournir, nous avons assez curieusement présenté l'évolution de l'actif comme une processus de type additif, alors que les paragraphes précédents avaient montré que seule une présentation multiplicative (exponentielle) avait un sens. Voyons ce que donne ce type de présentation.

Supposons comme plus haut que la cotation puisse subir toutes les minutes ou, plus généralement, toutes les Δt unités de temps, soit une augmentation (événement ω_1) représentée par la multiplication par un facteur u (comme *up*) strictement supérieur à 1, soit une diminution (événement ω_2) représentée par la multiplication par un facteur d (comme *down*), les deux événements étant supposés équiprobables

comme plus haut, on peut représenter ces deux cas de figure se présentant successivement au moyen de variables aléatoires équidistribuées X_k. On a alors :

$$C_t = C_0 \prod_{k=1}^{n} X_k$$

Mais le traitement du produit de variables aléatoires ne se fait pas aussi simplement que le traitement de la somme. Entre autre problème rencontré, on sait que l'espérance mathématique d'un produit n'est généralement pas égal au produit des espérances mathématiques, sauf en cas d'indépendance des variables. Nous convenons évidemment d'émettre cette hypothèse. Elle n'est pas surprenante : a priori, nous n'avons aucune idée des modifications futures *imprévisibles* que nous modélisons actuellement. Les renseignements objectifs permettant d'augurer de la croissance ou de la décroissance de l'actif doivent être inclus dans la partie *description déterministe* de l'actif.

Un façon élégante de régler le problème est le passage au logarithme. Considérons en effet la variable

$$ln \left[\frac{C_t}{C_0}\right] = \sum_{k=1}^{n} ln[X_k]$$

Pour cette variable, on peut recommencer le raisonnement effectué plus haut, et passer à la limite encréant ainsi une promenade aléatoire continue. A cette différence près que c'est le logarithme de la valeur du capital qui devient une variable aléatoire distribuée normalement, de moyennes et de variances calculables. Une telle variable porte le nom de *distribution lognormale.*

Toute la finance stochastique et en particulier la valorisation d'options se fait au départ de cette hypothèse. C'est le cas notamment pour la célèbre formule de Black et Scholes. Une version accessible du raisonnement conduisant à la valorisation de ce type d'actifs nous a été fournie en 1979 par le trio Cox, Ross et Rubinstein. C'est leur approche que nous proposerons plus loin.

Le passage aux logarithmes nous donne de précieux renseignements sur les coefficients multiplicatifs u et d. En effet, lors de la construction du bruit additif, nous avions supposé que les accroissements étaient opposés. Si les logarithmes de u et d suivent le même schéma, les valeurs u et d doivent alors être inverses :

$$d = \frac{1}{u}$$

5 Passage à la description d'actifs financiers

Un problème se pose lors de la construction d'un processus *bruit* de type multiplicatif. Comme nous venons de le montrer, la distribution de probabilité associée à ce type de bruit est lognormale. Mais lorsqu'on transforme un bruit *blanc* donc sans tendance, additif, en bruit multiplicatif, par passage à l'exponentielle, ce dernier crée un biais qu'il convient de corriger par l'introduction d'un processus de compensation.

5.1 Lemme de calcul

Considérons une variable normale X de moyenne nulle et de variance σ^2 : $X = N(0,\sigma)$. La densité de cette distribution prend la forme :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2.\pi}.\sigma}.e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \tag{2}$$

On sait que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2.\pi}.\sigma}.e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,dx = 1 \tag{3}$$

Considérons à présent une distribution de type $e^{N(0,\sigma)}$. L'espérance de cette variable lognormale est donnée par :

$$E[e^X] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^x \frac{1}{\sqrt{2.\pi}.\sigma}.e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,dx$$

En regroupant les exposants de e, de manière à construire un carré parfait, on obtient :

$$\begin{aligned} E[e^x] &= \frac{1}{\sqrt{2.\pi}.\sigma}.\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}.(x^2-2x\sigma^2)}dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2.\pi}.\sigma}.\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}.(x-\sigma^2)^2}.e^{\frac{\sigma^4}{2\sigma^2}}dx \end{aligned}$$

La dernière exponentielle (correction pour obtenir le carré parfait) est indépendante de x et l'on a, en utilisant (3) et en posant $y = (x - \sigma^2)$:

$$\begin{aligned} E[e^x] &= e^{\frac{\sigma^2}{2}}.\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2.\pi}.\sigma}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}dy \\ &= e^{\frac{\sigma^2}{2}} \end{aligned}$$

5.2 Construction d'un processus descriptif affecté d'un bruit blanc multiplicatif

Afin de décrire complètement les processus évolution du cours d'une action ou d'un panier d'actions, nous proposons de travailler avec une description déterministe perturbée par un processus bruit multiplicatif compensé. Le processus déterministe prend évidemment la forme obtenue plus haut à partir du raisonnement déductif que nous avons développé :

$$C(t) = C_0 e^{\int_0^t r(s)ds}$$

Le bruit prendra la forme d'une distribution lognormale construite sur base d'une normale de moyenne nulle et d'écart-type proportionnel à la racine du temps. Notons $N(0, \sigma\sqrt{t})$ cette distribution. La lognormale

$$e^{N(0,\sigma\sqrt{t})}$$

induit alors conformément à notre lemme une tendance

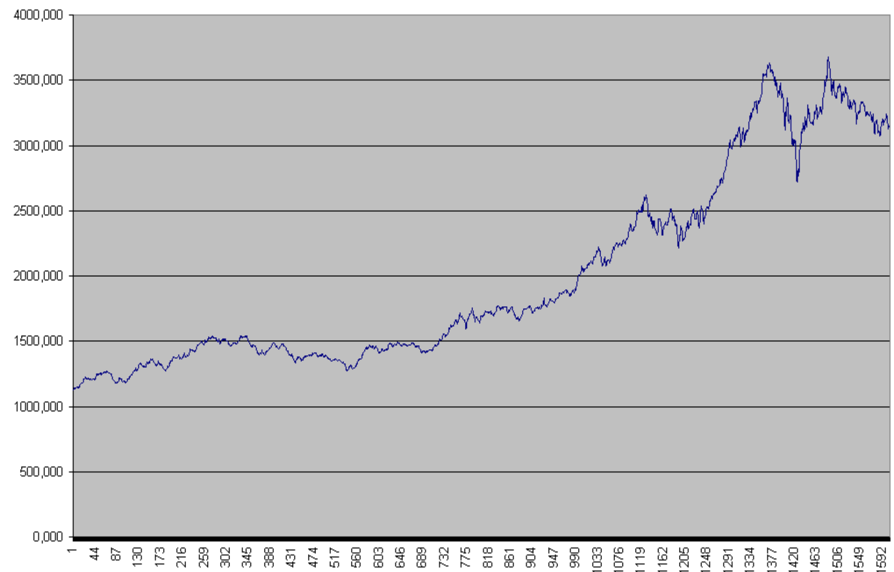
$$e^{\frac{\sigma^2 t}{2}}$$

que nous devons compenser. Nous pouvons à présent présenter notre modèle descriptif complet :

$$C(t) = C_0 e^{\int_0^t r(s)ds} e^{N(0,\sigma\sqrt{t})} e^{-\frac{\sigma^2 t}{2}}$$

5.3 Illustrations diverses et méthodes de calibrage

Observons à présent un actif financier véritable, comme par exemple le panier (fluctuant) constitué des 20 actions belges les plus actives au niveau des échanges : le BEL20. La chronique qui suit décrit l'évolution de ce panier entre 1993 et 1999 :



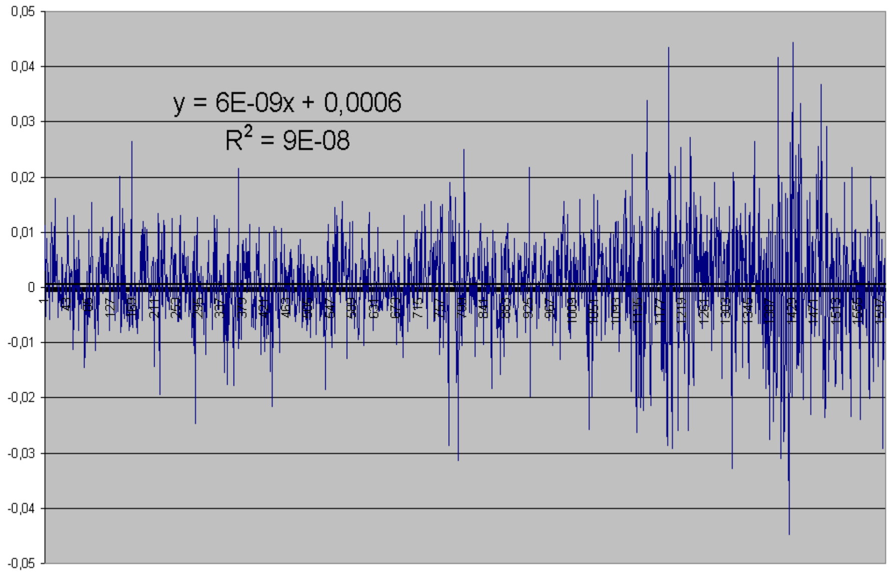
Intéressons-nous à présent aux taux de croissances journaliers observés. On peut calculer ces derniers de manière directe en considérations les accroissements journaliers relatifs :

$$\frac{C(t + Deltat) - C(t)}{C(t)}$$

Ou mieux encore, tenir compte du modèle multiplicatif, donc exponentiel et considérer les accroissements d'exposants, qui modélisent les taux de croissance lorsqaue l'on travaille en base e :

$$ln(C(t + \Delta t)) - ln(C(t)) = ln \left[\frac{C(t + \Delta t)}{C(t)} \right]$$

Graphiquement, on obtient :



On constate qu'une régression linéaire se traduit par une droite quasiment horizontale ce qui permet de justifier l'hypothèse d'un taux de croissance constant sur la durée observée. Hélas ! là s'arrêtent les bonnes nouvelles : il est impossible de considérer la volatilité comme constante étant donné les écarts importants observés durant le dernier tiers de la durée d'observation. Certains pics sont deux fois plus important en fin d'observation qu'en début. Cette situation porte de le nom d'hétéroscédasticité. Il convient alors pour calibrer le modèle de scinder les périodes d'observations.

Lorsque les pics de variations sont tous approximativement de même amplitude, on peut tabler sur une volatilité globalement constante. Cette situation est celle de l'homoscédasticité.

6 Valorisation d'options

L'option n'est pas un produit financier au sens usuel. Elle ne représente pas une part objective d'un actif d'une entreprise. L'option est un droit. La question est évidemment : comment valoriser un droit ? Pas question d'ajustement, de régression. Le raisonnement seul peut nous éclairer.

6.1 Considérations générales

Depuis 1979, un modèle mathématique dû à Cox, Ross & Rubinstein donne une présentation accessible de la méthode de valorisation utilisée. Nous parlerons dans la suite du modèle CRR.

L'*option* est un contrat qui confère à son acquéreur, contre paiement d'une prime, le droit d'acheter ou de vendre un actif financier (*l'actif sous-jacent*) à une date future notée T à un prix déterminé d'avance (le *prix d'exercice* de l'option) noté K. L'option d'achat et l'option de vente portent respectivement le nom de *call* et de *put*.

L'ensemble des actifs sur lesquels peut porter un contrat d'option est très large : action, obligation, taux de change, matière premiè, future, swap ou même une autre option.

L'option représente toujours un droit pour le détenteur et une obligation de vendre ou d'acheter pour l'émetteur. L'exercice de ce droit d'option peut se faire soit seulement à l'échéance du contrat (on parle alors d'*option européenne*) soit à n'importe quelle date jusqu'à cette échéance (*option américaine*).

Le détenteur d'une option d'achat exercera donc son droit d'option si le prix de l'actif sous-jacent est supérieur au prix d'exercice de l'option (*strike* en anglais); une option de vente sera par contre utilement exercée dans le cas contraire.

Dans la suite, nous nous limitons aux options européennes et nous supposons avoir affaire à un *marché parfait* c'est-à-dire, entre autres, exempt de frais de transaction et d'impôts et sur lequel les ventes à découvert sont tolérées sans restriction.

Le modèle CRR est discret, l'intervalle de temps $[0;T]$ est donc représenté par la liste des époques $0, 1, 2, ..., T$, séparée par une certaine unité de durée (la période), généralement assez courte. Dans la suite, nous détaillerons la raisonnement pour une ou deux périodes et nous contenterons de présenter un résultat général.

Nous supposons que le taux d'intérêt sans risque ne varie pas pendant cette période, qu'il est utilisable pour n'importe quelle échéance et qu'il est le même pour un emprunt et pour un placement. Ce taux d'intérêt, noté R_F, est relatif à une durée égale à la période telle que définie plus haut.

On suppose que l'évolution de l'action se fait de la manière suivante : l'action a, à tout instant t, la valeur (aléatoire) S_t et aura à l'instant suivant $(t+1)$ une des deux valeurs $S_t.u$ (supérieure à S_t) ou $S_t.d$ (inférieure à S_t) avec les probabilités respectives α et $(1-\alpha)$.

On a donc évidemment

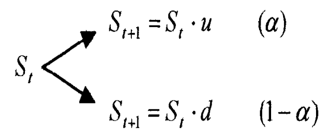
$$d \leq 1 \leq u$$

Mais on doit supposer en fait que

$$d \leq 1 < (1+R_F) \leq u$$

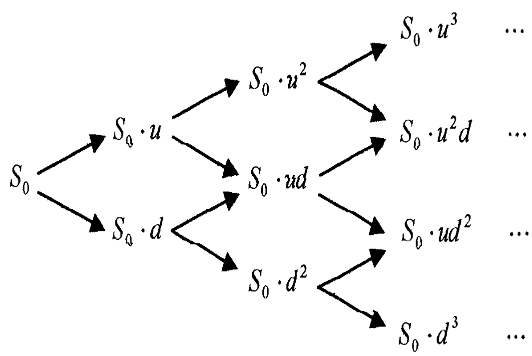
Cette inégalité se justifie aisément: personne ne prendrait le risque d'investir dans des produits à risque si un investissement sans risque procure plus de rendement.

On utilise généralement la représentation graphique suivante de l'évolution du prix de l'action :



On suppose que les paramètres u, d et α demeurent constants au cours du temps. On constate alors qu'une hausse suivie d'une baisse conduit au même résultat qu'une baisse suivie d'une hausse.

D'une manière plus générale, on peut construire un graphique, appelé *treillis binomial*, qui va de l'époque 0 (où l'action a la valeur certaine S_0) à l'époque qui nous intéresse T :



Nous raisonnons pour une option d'achat. La valeur de l'option au terme du contrat s'exprime en fonction de celle de l'action par la partie positive de la différence $(S_T - K)$ que nous notons :

$$C_T = \text{MAX } [(S_T - K), 0] = (S_T - K)^+$$

La valeur à terme connue, le raisonnement consiste à déterminer la valeur du *call* une période avant et de réitérer le raisonnement. Nous détaillons les calculs dans les cas d'horizons à 1 ou 2 périodes.

6.2 Horizon d'une période

Plaçons-nous dans le cas où $T = 1$. A partir de l'arbre de l'action, on voit aisément que le call C_0 (inconnu !) peut évoluer vers deux valeurs seulement, avec probabilités respectives α et $(1 - \alpha)$:

$$
\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & C_1 = C(u) = (S_0 \cdot u - K)^+ \\
C_0 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & C_1 = C(d) = (S_0 \cdot d - K)^+
\end{tikzcd}
$$

La valeur de C_1 (c'est-à-dire celle de $C(u)$ et de $C(d)$) étant connue, nous allons déterminer celle de C_0. Pour ce faire considérons un portefeuille constitué en $t = 0$ par

- l'achat de X actions sous-jacentes, dont la valeur est S_0 ;
- la vente d'un call sur ce sous-jacent, de valeur C_0.

La valeur V_0 de ce portefeuille et son évolution V_1 dans le contexte décrit sont données par

$$
\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & V_1 = X \cdot S_0 \cdot u - C(u) \\
V_0 = X \cdot S_0 - C_0 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & V_1 = X \cdot S_0 \cdot d - C(d)
\end{tikzcd}
$$

Choisissons X de façon que ce portefeuille soit non risqué : c'est le cas si les deux valeurs de V_1 sont rigoureusement égales. Le portefeuille est alors équilibré. Procédons ensuite à un raisonnement d'arbitrage : si le portefeuille est équilibré, son rendement doit être donné par le taux sans risque R_F. En effet, dans un marché efficient, il ne peut pas être possible de gagner davantage sans prendre de risque. On obtient donc

$$
\begin{aligned}
V_1 &= XS_0u - C(u) = XS_0d - C(d) && (4)\\
V_1 &= (XS_0 - C_0)(1 + R_F) && (5)
\end{aligned}
$$

La première équation fournit :

$$XS_0 = \frac{C(u) - C(d)}{u - d}$$

et par conséquent

$$V_1 = \frac{dC(u) - uC(d)}{u - d}$$

La seconde équation devient alors

$$\frac{dC(u) - uC(d)}{u - d} = \left(\frac{C(u) - C(d)}{u - d} - C_0\right)(1 + R_F)$$

qui se résout aisément par rapport à C_0 :

$$C_o = (1+R_F)^{-1}\left[\frac{(1+R_F)-d}{u-d}C(u) + \frac{u-(1+R_F)}{u-d}C(d)\right]$$

On peut poser:

$$\begin{aligned} q &= \frac{(1+R_F)-d}{u-d} \\ 1-q &= \frac{u-(1+R_F)}{u-d} \end{aligned}$$

ce qui permet de noter :

$$C_o = (1+R_F)^{-1}\left[qC(u) + (1-q)C(d)\right]$$

On vérifie que sous nos conditions les coefficients de $C(u)$ et $C(d)$ sont toujours compris entre 0 et 1 et qu'ils peuvent donc s'interpréter formellement comme une loi de probabilité. Cette dernière porte le nom de *loi de probabilité neutre* ou encore *de couverture.*

- **Remarque 1**

  On peut alors interpréter C_0 comme la valeur actuelle de l'espérance du *call à l'échéance* $(t=1)$ relativement à la loi de probabilité neutre, une loi binomiale de type $B(1,q)$. Nous rappelons en annexe quelques éléments relatifs aux distributions binomiales.

- **Remarque 2**

  L'appellation *probabilité neutre* ou *probabilité de couverture* se justifie aisément : l'espérance de l'action sous-jacente à l'échéance $(t=1)$ relativement à cette loi de probabilité est donnée par

  $$\begin{aligned} E_q(S_1) &= qS_0u + (1-q)S_0d \\ &= S_0\left[\frac{(1+R_F)-d}{u-d}u + \frac{u-(1+R_F)}{u-d}d\right] \\ &= S_0(1+R_F) \end{aligned}$$

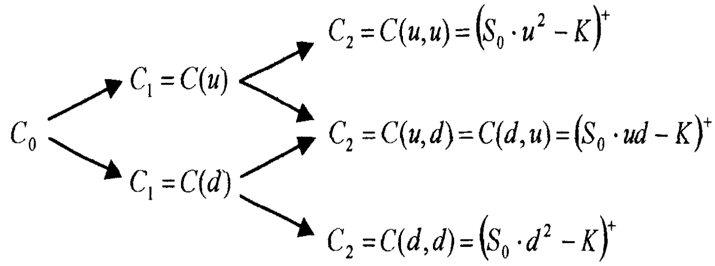
  L'évolution du titre sans risque est la même que l'évolution moyenne (pour cette loi de probabilité) du titre risqué.

- **Remarque 3**

  Ce qui est étonnant c'est que notre raisonnement d'arbitrage conduit à l'utilisation d'un calcul d'espérance mathématique relativement à une loi de probabilité qui n'est pas la loi réellement observée de paramètre α.

6.3 Deux périodes

Envisageons à présent le cas $T=2$. L'arbre binomial pour l'option devient alors :



Un raisonnement identique au précédent permet de passer de l'époque 2 à l'époque 1:

$$\begin{cases} C(u) = (1+R_F)^{-1}[qC(u,u) + (1-q)C(u,d)] \\ C(d) = (1+R_F)^{-1}[qC(u,d) + (1-q)C(d,d)] \end{cases}$$

ainsi que de l'époque 1 à l'époque 0 :

$$\begin{aligned} C_0 &= (1+R_F)^{-1}[qC(u) + (1-q)C(d)] \\ &= (1+R_F)^{-2}[q^2C(u,u) + 2q(1-q)C(u,d) + (1-q)^2C(d,d)] \end{aligned}$$

La considération des coefficients de $C(u,u), C(u,d)$ et $C(d,d)$ nous permet d'interpréter encore une fois la valeur initiale du *call* comme la valeur actuelle de l'espérance du *call à l'échéance* ($t = 2$) toujours relativement à une loi de probabilité binomiale $B(2, q)$.

6.4 T périodes

En généralisant ce qui vient d'être fait, on constate aisément que C_0 n'est autre que la valeur actuelle de l'espérance du *call à l'échéance* ($t = T$) par rapport à une loi de probabilité binomiale $B(T, q)$. On peut donc écrire

$$\begin{aligned} C_0 &= (1+R_F)^{-T} \sum_{j=0}^{T} q^j (1-q)^{T-j} C(\underbrace{u, ..., u}_{j}, \underbrace{d, ..., d}_{T-j}) \\ &= (1+R_F)^{-T} \sum_{j=0}^{T} q^j (1-q)^{T-j} (S_0 u^j d^{T-j} - K)^+ \end{aligned}$$

6.5 Annexe : schéma de Bernoulli et distribution binomiale

Le schéma de Bernoulli est un modèle probabiliste s'appliquant à des situations très diverses. Il est caractérisé par

- un nombre fini d'essais indépendants ;
- lors de chaque essai, deux résultats seulement sont possibles : succès et échec ;

- lors de chaque essai, la probabilité d'occurrence d'un succès est la même.

Si on appelle n le nombre d'essais et p la probabilité de succès lors de chaque essai, on parle de schéma de Bernoulli de paramètres $(n; p)$.

Une variable binomiale de paramètres $(n; p)$ est une variable aléatoire discrète notée $B(n; p)$ prenant les valeurs $0, 1, 2, ..., n$ avec comme probabilités associées

$$\Pr[B(n;p) = k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad k \in \{0, 1, ..., n\}$$

Dans un schéma de Bernoulli de paramètres $(n; p)$, le nombre de succès sur les n essais est une variable aléatoire binomiale de paramètres $(n; p)$. En effet, l'événement "le nombre de succès est égal à k" est l'ensemble des singletons constitués de k succès et $(n-k)$ échecs, dans n'importe quel ordre. En raison de l'indépendance des essais, ces singletons ont pour probabilité $p^k(1-p)^{n-k}$ et ils sont en nombre $\binom{n}{k}$.