

# Chapitre 4

## AJUSTEMENTS ET APPLICATIONS

### 1 Introduction

La théorie du brownien dit “géométrique”, modélisant les processus de capitalisation que nous avons présentés au chapitre précédent, ne donne malheureusement pas toujours les résultats espérés. Il n’en demeure pas moins qu’elle constitue un premier pas nécessaire vers la modélisation sophistiquée des actifs à risque. L’utilisation du brownien standard sous-tend encore les calculs effectués dans la plupart des bourses, notamment en matière de calculs d’options.

Nous commençons par montrer comment on peut ajuster le modèle théorique à une certaine réalité observée. Les différents types d’ajustement conduisent souvent à des résultats contradictoires.

### 2 Méthodes d’ajustement

#### 2.1 Considérations théoriques

Reprenons la relation de capitalisation connue sous l’appellation de *brownien géométrique* dans le cas particulier de la croissance et de la volatilité constantes. Nous avons vu que la description d’actifs dont la croissance affectait une tendance constante  $r$  perturbée par une volatilité également constante  $\sigma$  suivait la distribution lognormale :

$$C(t) = C(0) \cdot e^{(r-\sigma^2/2)\cdot t} \cdot e^{\sigma w(t)}.$$

Quel que soit l’horizon choisi  $t$  et pour tout  $k$ , on a :

$$\ln \left[ \frac{C(t+k)}{C(t)} \right] = \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \cdot k + \sigma \cdot w(k)$$

qui est évidemment distribuée normalement (normalité du brownien  $w(t, \omega)$ ) et dont les paramètres se calculent aisément :

$$E \left[ \ln \left[ \frac{C(t+k)}{C(t)} \right] \right] = \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \cdot k \quad (22)$$

(l'espérance du brownien est nulle) et

$$VAR \left[ \ln \left[ \frac{C(t+k)}{C(t)} \right] \right] = \sigma^2 \cdot k \quad (23)$$

(la variance du brownien standardisé est égale au temps). Dans le cas particulier  $k = 1$ , on arrive aisément aux paramètres  $r$  et  $\sigma$  en ajustant les observations par la méthode des moments. Soient  $\bar{x}$  et  $s^2$  les moyenne et variance des observations  $\ln \left[ \frac{C(t+1)}{C(t)} \right]$  associées à un actif à risque. On arrive à :

$$\sigma^2 = s^2$$

et

$$r = \bar{x} + \frac{s^2}{2}$$

## 2.2 Cas particulier 1 : indice BEL-20

### 2.2.1 Horizon 1991-1997

Dans le cas de l'indice BEL-20, observé du 2 avril 1991 au 11 mars 1997<sup>29</sup> on arrive aux résultats numériques suivants :

$$r = 0.0965 \quad \sigma = 0.0994$$

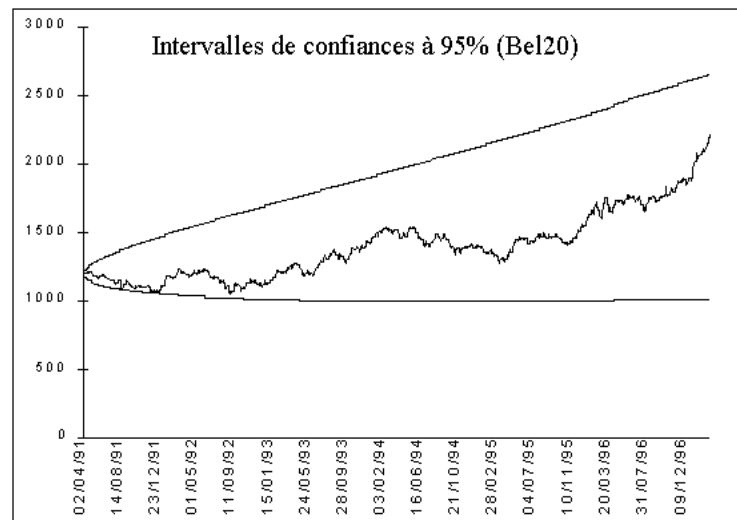
Graphiquement, on peut vérifier la compatibilité de la description théorique et des observations en construisant des intervalles de confiance à 95% sous hypothèse de normalité, en utilisant les valeurs historiques. On obtient le graphique situé en haut de page suivante.

### 2.2.2 Utilisation de la régression usuelle

Dans le cas d'une croissance exponentielle, on pourrait penser que l'utilisation de la régression linéaire en coordonnées semi-logarithmiques pourrait donner des résultats intéressants. Il n'en est rien.

Cette méthode manque de robustesse et ne résiste pas à l'amplitude des fluctuations observées sur le marché. L'observation du BEL-20 sur le même horizon donne, après passage aux coordonnées semi-logarithmiques et régression linéaire classique, un taux de croissance

<sup>29</sup>Nous verrons plus loin ce qui se passe lorsque l'on choisit un horizon plus large en incluant les observations postérieures.



estimé à  $r = 0.0889$  avec une valeur initiale (2 avril 1991) de 1056.66 s'écartant significativement de la valeur réelle (1193.91). En utilisant toujours la même méthode (moindre somme de carrés) mais en contraignant la fonction à passer par la vraie valeur initiale, on obtient un rendement estimé de  $r = 0.058165$  singulièrement inférieur à ce que nous attendions. L'explication en est simple : les valeurs négatives du taux de croissance de l'indice en début d'observation, contrairement à la tendance à la croissance constatée plus tard, influencent significativement le résultat. A ce stade une régression "robuste" serait nécessaire.

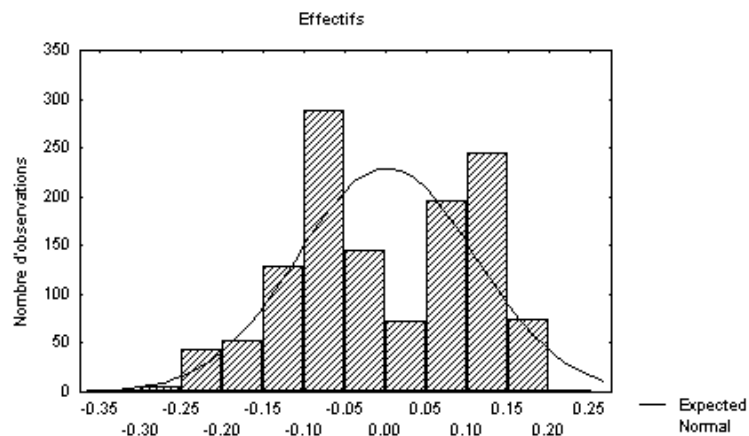
Le problème de la méthode des moindres carrés est qu'elle sous-estime les petites variations relatives à la tendance tout en surestimant celles qui s'en écartent fortement. L'ajustement accorde ici trop d'importance à la chute (pendant un intervalle relativement court) de l'indice.

### 2.2.3 Observation des résidus

L'observation des écarts relatifs à la tendance supposée constante  $r$  conduit au graphique suivant :



Le graphique peut éventuellement suggérer une modélisation sinusoidale des rendements. Une telle étude a par ailleurs déjà été réalisée<sup>30</sup>. Le logiciel Statistica permet de tester la normalité des résidus. Nous arrivons à une distribution bimodale, très éloignée de la normale attendue.



#### 2.2.4 BEL-20 : horizons variables

Nous considérons à présent différentes façons d'ajuster le modèle. Sur base des rendements observés sur un jour, trois mois, six mois ou un

<sup>30</sup>Voir [42].

an, nous donnons plusieurs estimations des paramètres  $r$  et  $\sigma$  intervenant dans le modèle sur base des relations (22) et (23) en donnant à  $k$  les valeurs  $\frac{1}{250}$ ,  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{2}$  et 1. Nous considérons également plusieurs horizons. Les valeurs numériques observées sont généralement significativement différentes :

**Tableau des moyennes**

Horizon	$k = \frac{1}{250}$	$k = \frac{1}{4}$	$k = \frac{1}{2}$	k=1
94-99	0.1468	0.1517	0.1539	0.1635
95-99	0.1864	0.1811	0.1733	0.1702
96-99	0.2033	0.2094	0.2041	0.2120
97-99	0.2042	0.2024	0.2062	0.2156
98-99	0.1777	0.1627	0.1493	0.1832

**Tableau des écarts-types**

Horizon	$k = \frac{1}{250}$	$k = \frac{1}{4}$	$k = \frac{1}{2}$	k=1
94-99	0.1460	0.1582	0.1552	0.1448
95-99	0.1537	0.1626	0.1569	0.1523
96-99	0.1662	0.1719	0.1619	0.1329
97-99	0.1807	0.1898	0.1816	0.1519
98-99	0.1871	0.2075	0.1970	0.1706

### 2.3 Cas particulier 2 : indice CAC 40

Effectuons à présent le même travail à partir de l'indice CAC 40. L'hypothèse d'un rendement  $r$  constant et d'une volatilité  $\sigma$  est peu réaliste et la modification de l'horizon choisi apporte des modifications significatives sur l'estimation numérique des paramètres. L'hypothèse de stationnarité, fort commode, ne semble pas résister à l'analyse des observations.

**Tableau des moyennes**

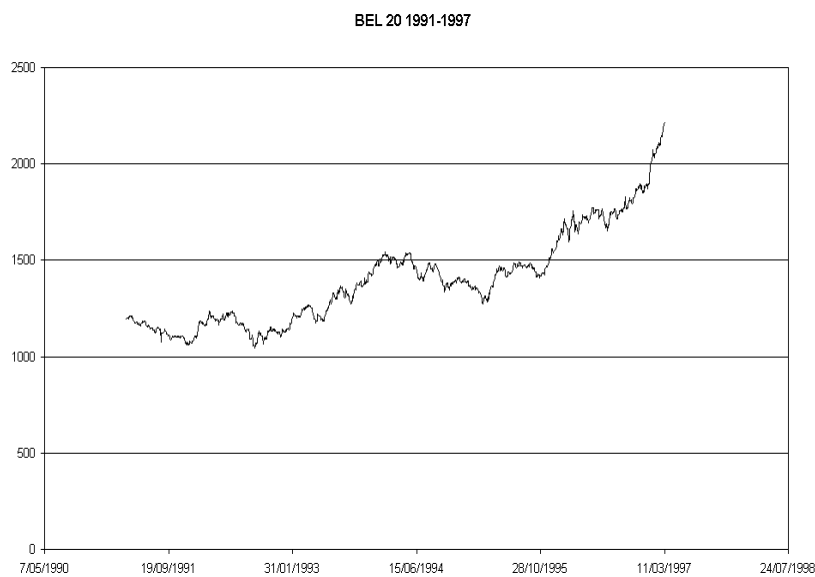
Horizon	$k = \frac{1}{250}$	$k = \frac{1}{4}$	$k = \frac{1}{2}$	k=1
94-99	0.1793	0.1635	0.1530	0.1492
95-99	0.2493	0.2174	0.1960	0.1725
96-99	0.3085	0.2795	0.2511	0.2281
97-99	0.3380	0.3053	0.2900	0.2653
98-99	0.3661	0.3209	0.2727	0.2556

**Tableau des écarts-types**

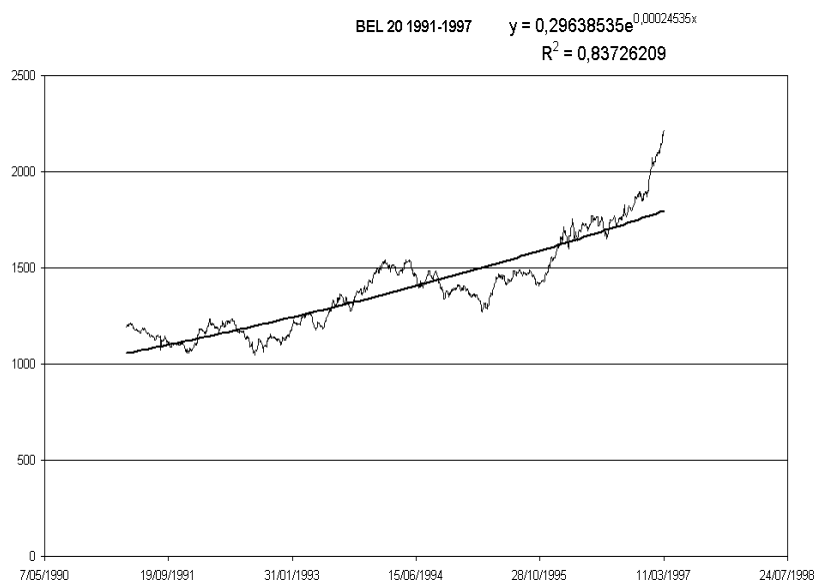
Horizon	$k = \frac{1}{250}$	$k = \frac{1}{4}$	$k = \frac{1}{2}$	k=1
94-99	0.1948	0.1938	0.1812	0.1686
95-99	0.1983	0.1953	0.1743	0.1670
96-99	0.2038	0.2000	0.1675	0.1164
97-99	0.2241	0.2201	0.1809	0.1042
98-99	0.2262	0.2500	0.2060	0.1170

### 3 Quelques observations

Considérons l'indice BEL-20 entre 1991 (sa création) et 1997. L'évolution de l'indice a suivi :



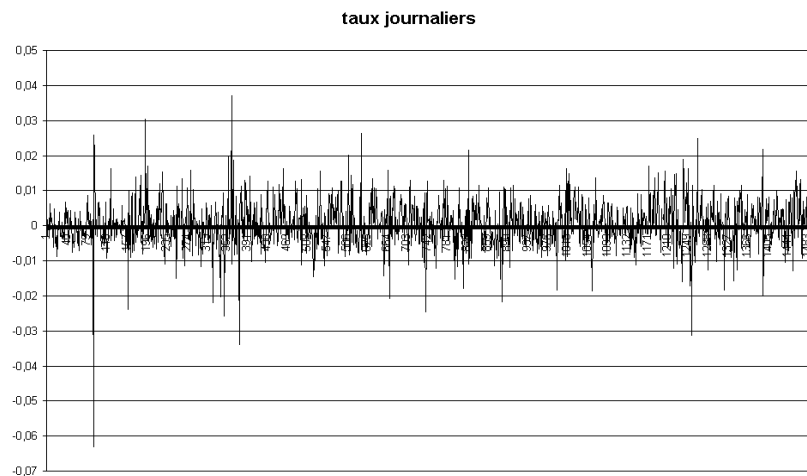
Le graphe donne-t-il vraiment l'impression d'une exponentielle ? En faisant passer une courbe de tendance de ce type par la méthode des moindres carrés en coordonnées logarithmiques, on arrive à :



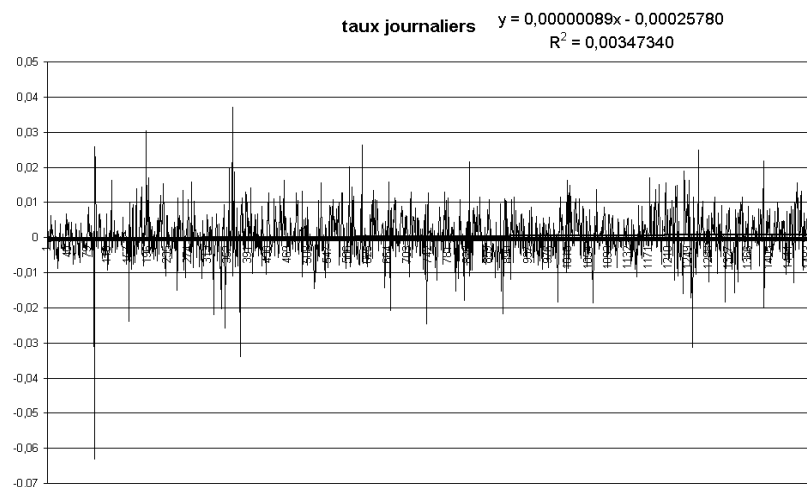
L'allure générale de la tendance ne colle pas vraiment aux observations encore qu'en travaillant avec un taux de croissance journalier de 0.000245, on arrive à une détermination égale à 0.837, qui satisferait plus d'un statisticien.

C'est le problème du travail en coordonnées logarithmiques pour la régression : des erreurs beaucoup plus grande en vraie grandeur sont considérablement réduite après passage aux logarithmes.

Passons à présent aux taux journaliers observés. Le choix du travail en jours ouvrables plutôt qu'en jours calendriers s'explique : l'absence d'activité pour raison politique ou sociale ne peut être prise en compte. On arrive au graphique suivant :



L'hypothèse d'un taux de tendance constante  $r$  perturbé par un mouvement brownien est-elle crédible ? Pour le vérifier, faisons passer une tendance linéaire par nos observations. Si cette tendance est horizontale ou presque, notre hypothèse sera crédible.

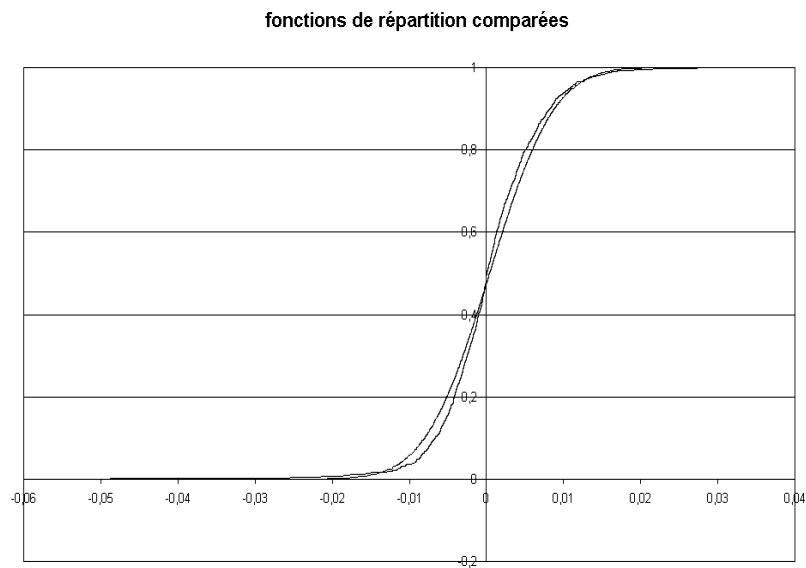


On le constate, la tendance est presque horizontale avec une pente inférieure à  $10^{-6}$ .

Notre modèle est-il pour autant acceptable ? La normalité des taux est en tout cas criticable. Observons la fonction de répartition des



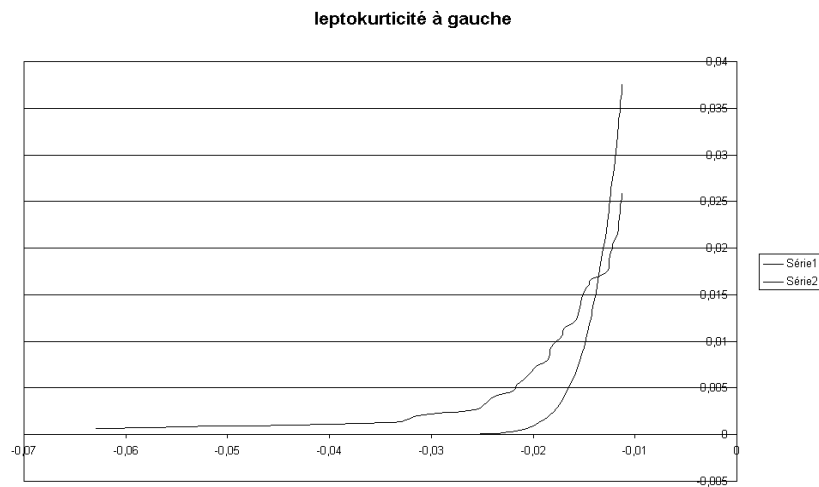
taux comparée à une distribution normale de même trend et de même volatilité. On arrive au graphique :



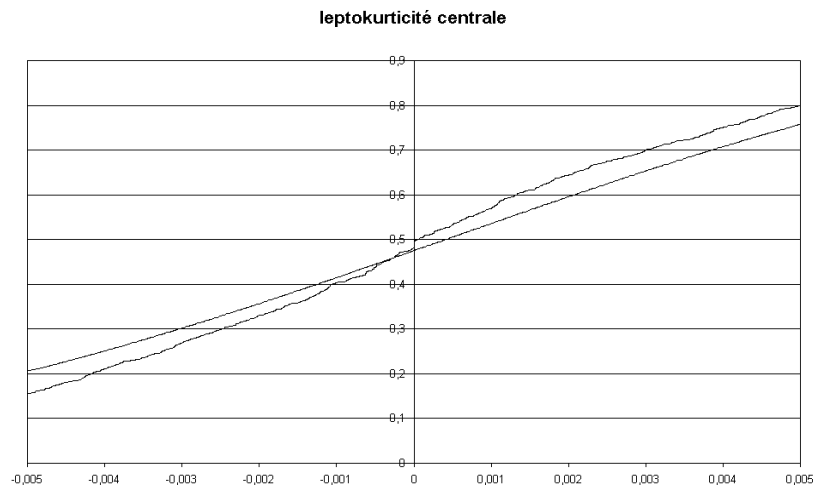
Comme toujours, on observe une forte leptokurticité : trop de valeurs extrêmes et, simultanément, trop de valeurs centrales.

Il est toujours intéressant de représenter la boîte à moustaches des distributions "rendements observés" : ces dernières présentent alors de toutes petites boîtes assorties de longues moustaches.

Observons ici la queue gauche de la distribution :



On a toujours une sous-estimation du risque et l'estimation de la  $VaR^{31}$  au moyen du modèle est criticable. Observons encore les valeurs centrales des taux pour constater la forte pente des observations en comparaison avec la pente théorique sous hypothèse de normalité.




---

<sup>31</sup>Value at Risk, rendement minimum avec une probabilité fixée.

## 4 Distributions alternatives

### 4.1 Introduction

La modélisation des taux de rendement observés empiriquement à très court terme est rarement possible au moyen de distributions élémentaires comme la distribution normale.

Certes cette dernière est commode puisque sa stabilité et sa variance finie en font la seule permettant la construction immédiate d'une intégrale stochastique aisément utilisable.

Mais depuis les incontournables travaux de Lévy (1930), le rêve d'une description de l'univers sauvage de la bourse au moyen de distributions agréables de variabilité limitée s'est envolé : hors normalité, la stabilité se traduit par un moment d'ordre deux infini.

La normalité s'est donc imposée comme inévitable et ce malgré d'innombrables problèmes d'ajustement et le rejet quasi systématique de cette hypothèse lors de la confrontation aux observations.

Les différences entre les observations et le modèle quasiment imposé de la normalité sont énormes. Les valeurs extrêmes sont systématiquement sous-estimées de même que les valeurs les plus centrales : c'est le phénomène de leptokurticité.

L'utilisation des modèles pose donc problème surtout lorsque l'on s'intéresse aux valeurs extrêmes dans le cadre d'un calcul de  $VaR$  par exemple. Se pose alors la question cruciale de la qualité des modèles utilisés et cette dernière débouche le plus souvent sur un rejet global de l'outil théorique.

Cette position est regrettable et nous allons montrer comment on peut, simplement, proposer un modèle élémentaire, inspiré des distributions du sociologue Pareto, et qui s'avère facilement ajustable et nettement supérieur à la simple normalité.

### 4.2 Leptokurticité

Dans leur très grande majorité, les séries financières de rendements à fréquence intra-journalière, journalière et même hebdomadaire se caractérisent par des distributions marginales leptokurtiques

Si la leptokurticité des séries de rendements d'actifs financiers est un thème récurrent des études empiriques, leurs auteurs n'ont toujours pas atteint de consensus quant à l'origine de ce rejet de la normalité ni sur une distribution alternative à adopter.

Deux grands courants ont longtemps coexisté dans ce domaine : celui qui considère que la distribution évolue au cours du temps et celui qui suppose que les rendements des actifs financiers sont issus d'une distribution de probabilité unique mais leptokurtique.

Des exemples de telles distributions sont d'une part les distributions stable de Lévy parfois appelée abusivement distributions stables parétiennes et les distributions de Student.

Chacune de ces distributions présente des avantages et des inconvénients pour le modélisateur. On peut mettre à l'actif des distributions stables, l'invariance de son exposant caractéristique par rapport à la somme des observations.

Mais l'inconvénient majeur de ces distributions réside dans l'inexistence des moments d'ordre 2. Les distributions de Student possèdent des moments d'ordre deux finis (pour autant que le degré de liberté soit supérieur ou égal à 2) mais n'ont pas l'agréable propriété de stabilité.

Dans les années 80, plusieurs auteurs<sup>32</sup> ont suggéré que l'aspect leptokurtique de la distribution des returns pourrait provenir non plus d'une distribution unique, mais d'un mélange de deux distributions normales de même moyenne mais de variances différentes.

$$\phi(x) = \varphi\phi_1(x) + (1 - \varphi)\phi_2(x)$$

où  $\phi_i \sim N(\mu, \sigma_i^2)$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , et  $\varphi \in [0, 1]$  est la fréquence relative des observations provenant de la distribution  $\phi_1$ .

Le cas de la combinaison de deux distributions normales de même moyenne mais ayant des variances différentes n'est qu'une possibilité parmi d'autres de construction d'une distribution leptokurtique.

On peut également obtenir le même résultat à partir d'une distribution normale dont la moyenne conditionnelle et la variance condi-

---

<sup>32</sup>Voir [21].

tionnelle évoluent au cours du temps.

L'élément central de l'explication de la leptokurticité est ici le caractère non i.i.d. (*indépendant et identiquement distribué*) des variables. Les modèles GARCH<sup>33</sup> doivent une partie de leur succès à leur propriété de générer des queues de distribution plus épaisses que la normale pour la distribution (non conditionnelle) des returns.

Dans ce qui suit, nous allons développer le point de vue alternatif et optons pour la construction d'une distribution unique ajustable non normale et présentant les particularités requises pour modéliser des rendements à valeurs extrêmes fréquentes.

### 4.3 Indice DAX

Afin d'illustrer nos propos dans un contexte européen, nous présentons ici le cas de l'indice allemand DAX (variable  $D(t)$ ) entre 1996 et 2000, totalisant ainsi quelques 902 observations journalières de rendement. On calcule aisément la moyenne et la variance observées de la variable rendement journalier<sup>34</sup> :

$$r(t) = \frac{D(t) - D(t-1)}{D(t-1)}$$

On obtient :

$$\bar{r} = 0,000959959 \text{ et } \sigma(r) = 0,014575628$$

Graphiquement, ces rendements journaliers se comportent comme le montre le graphique suivant :

---

<sup>33</sup>Voir [22] et [66].

<sup>34</sup>On peut également travailler avec la variable  $\ln\left(\frac{D(t)}{D(t-1)}\right)$ .

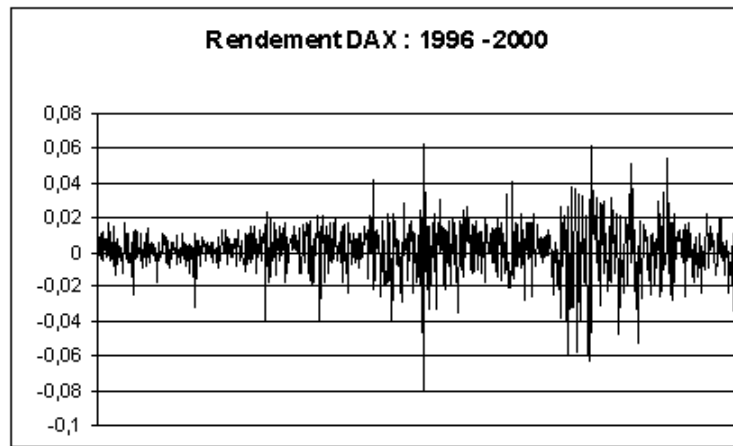
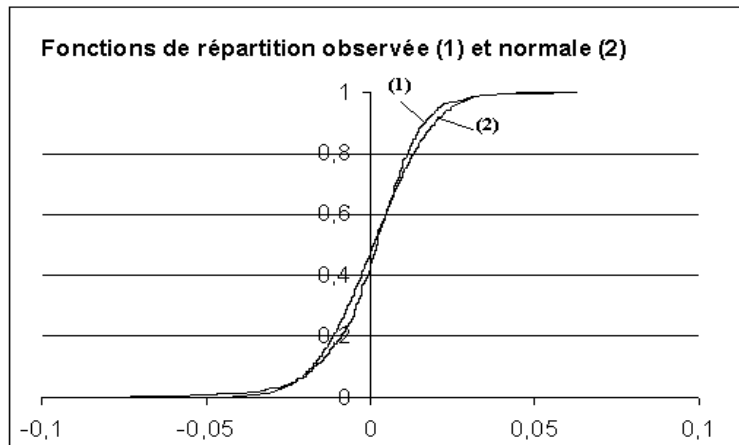
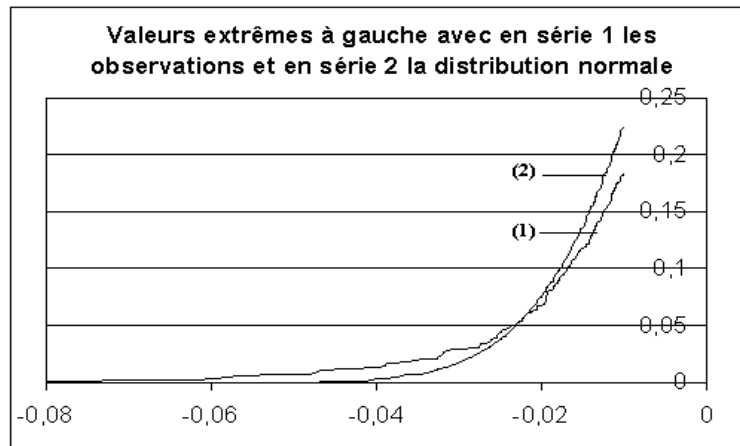


Figure 1: rendements journaliers DAX 1996-2000

La fonction de répartition observée peut être comparée à la répartition normale de mêmes moyenne et variance :



Le comportement de queues de courbe est particulièrement intéressant. Nous présentons ici les valeurs à gauche utiles au calcul de la *VaR*.



On le constate, le recours à la normalité pose problème. Nous nous proposons dans la suite de construire une fonction de répartition mieux adaptée aux observations.

#### 4.4 Distributions de Pareto

Vilfredo Pareto (1848 - 1923) est ce sociologue qui se consacra dès 1890 à une modélisation pure de l'économie qui devait, selon lui, s'étudier comme la physique. On confond souvent les distributions de Pareto avec les distributions stables (par addition) étudiées par Paul Lévy (1886 - 1971) dont les propriétés dépassent le cadre de cet article.

##### 4.4.1 Distributions de base

On appelle distributions de Pareto une famille de distributions définies sur l'ensemble des réels supérieurs à 1 et dont la fonction de répartition présente un comportement polynomial pour des valeurs infinies de la variable. Formellement, on pose :

$$F(x) = 1 - \frac{1}{x^a}$$

avec  $a > 0$ . On en tire aisément :

$$f(x) = \frac{a}{x^{a+1}}$$

Les moments de cette distribution se calculent sans difficulté. On vérifie que

$$E[X^n] = \frac{a}{a-n}$$

dès que  $n < a$  et que

$$E[X^n] = \infty$$

lorsque  $n \geq a$ . On en tire en particulier lorsque  $a > 2$  la valeur de la variance :

$$VAR[X] = \frac{a}{[(a-1)^2(a-2)]}$$

#### 4.4.2 Extension des distributions

Notre propos est d'étendre le domaine de distributions de ce type à l'ensemble des réels. Il convient de construire une fonction de répartition tendant vers 1 en  $+\infty$  comme  $1 - x^{-a}$  et vers 0 en  $-\infty$  comme  $|x|^{-b}$ . L'idée consiste à travailler avec les fonctions réciproques.

Étudions la fonction  $h(x)$  de  $\mathfrak{R}_0^+$  dans  $\mathfrak{R}$  :

$$h(x) = x^{-\frac{1}{a}} - x^{\frac{1}{b}} = h_1(x) - h_2(x)$$

Au voisinage de 0, cette fonction a un comportement asymptotique comparable à celui de la fonction

$$h_1(x) = x^{-\frac{1}{a}}$$

alors que son comportement asymptotique au voisinage de l'infini ( $+\infty$ ) est celui de la fonction

$$h_2(x) = -x^{\frac{1}{b}}$$

En procédant à une inversion des axes (permutation  $x$  et  $y$  et donc inversion des coefficients angulaires), on obtient une fonction de  $\mathfrak{R}$  dans  $\mathfrak{R}_0^+$  ayant en moins l'infini le comportement de  $|x|^b$  et en plus l'infini celui de  $x^{-a}$ . Formellement, on définit une fonction  $g(x)$  de manière implicite par

$$x = g(x)^{-\frac{1}{a}} - g(x)^{\frac{1}{b}}$$

Étudions à présent la fonction

$$F(x) = \frac{1}{1+g(x)} = 1 - \frac{g(x)}{1+g(x)}$$



Cette dernière tend vers 0 en moins l'infini comme  $|x|^b$  et vers 1 en plus l'infini comme  $1 - x^{-a}$ .

#### 4.4.3 Cas particulier

On peut obtenir une forme explicite lorsque  $a = b$ . Dans ce cas particulier, l'équation définissant  $g(x)$  implicitement devient :

$$x = g(x)^{-\frac{1}{a}} - g(x)^{\frac{1}{a}}$$

En posant

$$g(x)^{\frac{1}{a}} = Y,$$

l'équation se réduit à l'expression élémentaire

$$x = \frac{1}{Y} - Y$$

Celle-ci est équivalente à

$$(x + Y)Y = 1$$

dont on tire

$$Y = \frac{-x + \sqrt{x^2 + 4}}{2}$$

La fonction de répartition a donc la forme :

$$F(x) = \frac{1}{1 + \left[ \frac{-x + \sqrt{x^2 + 4}}{2} \right]^a}$$

On vérifie que la moyenne de cette distribution est nulle. Ce résultat s'obtient aisément en constatant tout d'abord que la médiane de la distribution est effectivement égale à 0<sup>35</sup>. On observe enfin la symétrie de la fonction densité par rapport à la valeur  $x = 0$  en vérifiant par simple calcul<sup>36</sup> que pour toute valeur positive  $x$  :

$$F(x) + F(-x) = 1$$

La distribution doit donc s'ajuster aux écarts observés par rapport à la croissance moyenne de l'actif à modéliser. L'ajustement se faisant alors sur base de la variance quand cette dernière existe.

<sup>35</sup>On vérifie tout simplement que  $F(0) = \frac{1}{2}$ .

<sup>36</sup>On multiplie numérateur et dénominateur par  $2^a$  et on passe au dénominateur commun.

## 4.5 Ajustements

On peut évidemment utiliser la méthode classiques des moindres sommes de carrés pour ajuster les distributions observées décarts par rapport au rendement moyen. Faute de paramétrisation, des méthodes d'approximations successives sont recommandées.

Dans le cas particulier de la distribution symétrique à un seul paramètre, un fichier élémentaire de calculs permet de retenir la valeur de  $a$  selon la méthode LSS<sup>37</sup>.

Dans le cas qui nous occupe, on arrive à  $a = 270$ . Graphiquement, les observations et la distribution Pareto sont fort proches et singulièrement éloignées de la distribution normale que nous superposons au graphe.

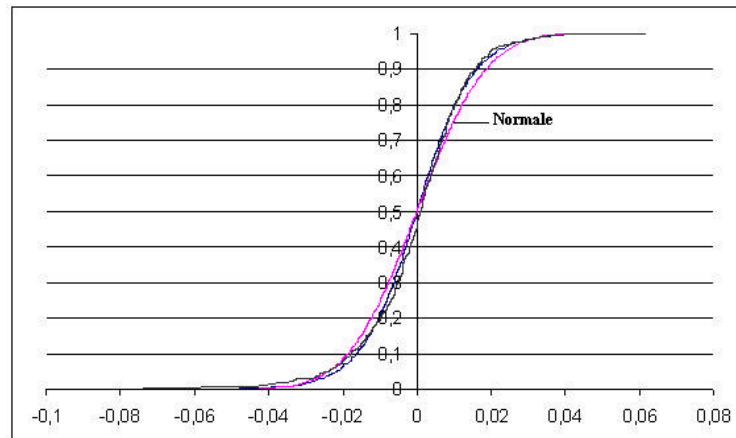


Figure 2: Comparaison entre la distribution observée, la distribution Pareto ajustée et la distribution normale ajustée.

## 5 Quelques SICAVS particuliers

On a vu se développer ces dernières années une multitude de produits dérivés d'indices boursiers tentant de proposer aux clients des possibilités de rendement accru sans augmentation significative du risque.

---

<sup>37</sup>Least Sum of Squares.

Nous verrons que ce dernier point, développé par les organismes financiers est loin d'être une évidence.

### 5.1 Présentation d'un exemple

Considérons un investissement dans la bourse de Paris et suivant l'évolution de l'indice CAC 40. Les conditions de la SICAV considérée sont les suivantes :

- Durée de vie : 5 ans.
- La croissance de la SICAV donne brut la croissance du CAC 40 avec un rendement minimum de 0 % et un rendement maximum de 72%.
- Les taxes boursières sont de 1% à l'achat et de 0.5 % à la sortie.
- Le droit d'entrée dans la SICAV est de 1.5%.
- Il n'y a pas de droit de sortie si le terme de 5 ans est atteint.

Nous allons travailler pour simplifier avec une modélisation de type brownien géométrique à tendance et volatilité constantes. Nous avons vu au paragraphe précédent à quel point il est difficile d'estimer les paramètres du modèle à partir des observations. Nous posons :

$$r = 0.2 \quad \text{et} \quad \sigma = 0.2$$

Le produit à étudier a une distribution de rendement en continu  $x$  mi-discrète mi-continue. En fait, sous nos hypothèses, sa distribution est une normale tronquée en  $x = 0$  et en un point  $x$  correspondant à une croissance de 72%, (c'est-à-dire vérifiant l'équation  $e^x = 1.72$  correspondant à  $x = 0.5423$ ), ces deux points portant toute la masse des observations inférieures (resp. supérieures).

La mathématique des distributions mixtes est mal développée et les logiciels usuels ne présentent pas les représentations graphiques de fonctions discontinues. Dans un premier temps, nous calculons les masses de probabilités associées aux deux points de troncature. En  $x = 0$ , le facteur de capitalisation sur 5 ans est égal à 1. Notons comme à l'habitude  $z$  la distribution normale centrée réduite. La probabilité de rendement négatif est égale à  $F(z_0)$  où  $z_0$  vérifie :

$$e^{(0.2 - \frac{0.2^2}{2}) \cdot 5} \cdot e^{0.2 \cdot z_0 \cdot \sqrt{5}} = 1$$

On a encore :

$$e^{0.9} \cdot e^{0.4472136z_0} = 1$$

On en tire  $z_0 = -2.01246$  et  $F(z_0) = 0.022086$  qui représente la masse de probabilité associée au rendement brut nul de la SICAV. Le rendement net annuel devient alors négatif, compte tenu des frais initiaux et finaux. On a en effet pour un capital investi  $C_0$  :

$$C_0 \cdot (1.025) \cdot (1 + \tau)^5 = C_0 \cdot (0.995)$$

On en tire :

$$\tau = -0.005923$$

Traitons à présent du rendement maximum accordé. Ce dernier correspond à un facteur de capitalisation égal à 1.72. Il faut donc résoudre :

$$e^{(0.2 - \frac{0.2^2}{2}) \cdot 5} \cdot e^{0.2 \cdot z_1 \cdot \sqrt{5}} = 1.72$$

On résoud :

$$0.9 + 0.4472136z_1 = \ln(1.72)$$

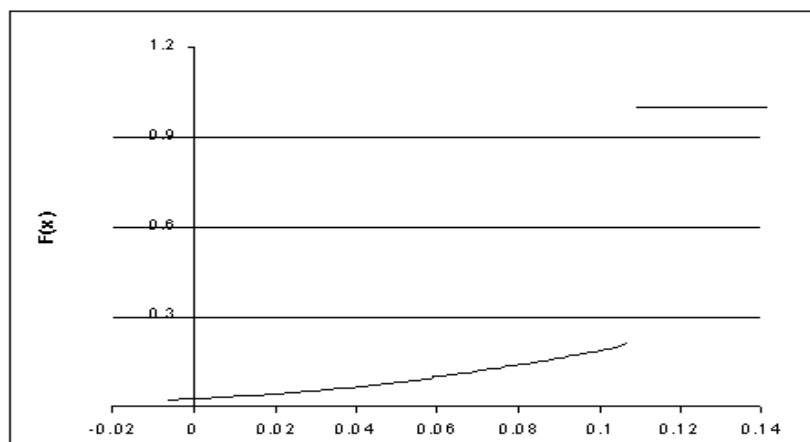
On trouve aisément  $z_1 = -0.79978$ . La masse de probabilité associée à ce point est évidemment égale à  $1 - F(z_1) = 0.78808$ . Calculons le rendement net. On résoud, en tenant compte des frais cumulés à l'émission et des frais de sortie :

$$C_0 \cdot (1.025) \cdot (1 + \tau)^5 = 1.72 C_0 \cdot (0.995)$$

La solution est :

$$\tau = \left[ \frac{1.72 \cdot (0.995)}{1.025} \right]^{\frac{1}{5}} - 1 = 0.10796.$$

Pour les points intermédiaires, les calculs sont évidemment identiques. Graphiquement, la fonction de répartition de la SICAV est donnée par :



## 5.2 Investissement alternatif

Traitons à présent le cas d'une deuxième SICAV appuyée sur le même sous-jacent et suivant les mêmes procédures de frais et de durée identique, mais donnant cette fois les deux tiers de la croissance du CAC 40 sans borne supérieure avec toutefois une barrière absorbante en  $x = 0$ , l'investisseur étant assuré de retrouver son capital après 5 ans. Pour les rendements négatifs, les deux produits sont identiques. Qu'en est-il pour des rendements positifs?

Traitons d'abord le cas d'un facteur de capitalisation brut de 1.72, correspondant au rendement maximal sur 5 ans dans l'exemple précédent. Pour obtenir un facteur de capitalisation SICAV de cet ordre, il convient d'enregistrer une croissance du sous-jacent  $y$  correspondant à un coefficient de capitalisation vérifiant :

$$1 + \frac{2}{3}y = 1.72$$

La croissance brute  $y$ , solution de cette équation, vaut donc 1.08 (108 %) et on doit travailler avec un facteur de capitalisation égal à 2.08. La valeur de la fonction de répartition correspondante s'obtient en considérant le point  $z_2$  vérifiant :

$$0.9 + 0.4472136z_2 = \ln(2.08)$$

On en tire  $z_2 = -0.3748$  auquel correspond la fonction de répartition  $F(z_2) = 0.3539$ . Le rendement annuel attendu pour cette valeur est

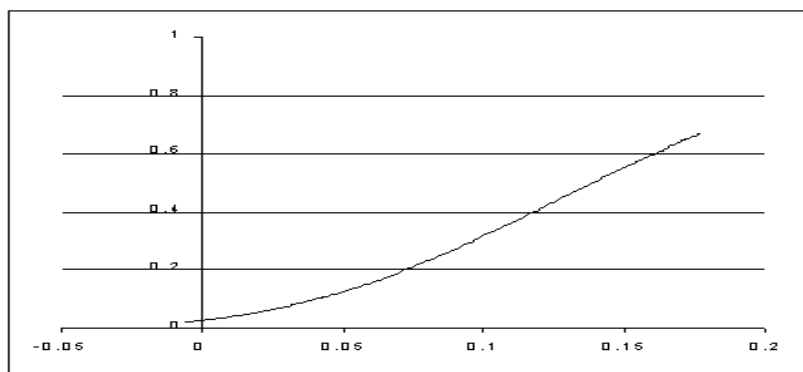
identique à ce qui a été calculé au point précédent pour le rendement maximal. Pour une croissance quelconque  $y$  donnant un coefficient de capitalisation  $1 + y$ , on calcule :

$$z = \frac{\ln(1 + y) - 0.9}{0.4472436}$$

$F(z)$  est associé au rendement annuel net

$$\tau = \left[ \frac{(1 + \frac{2}{3}y) \cdot (0.995)}{1.025} \right]^{\frac{1}{5}} - 1$$

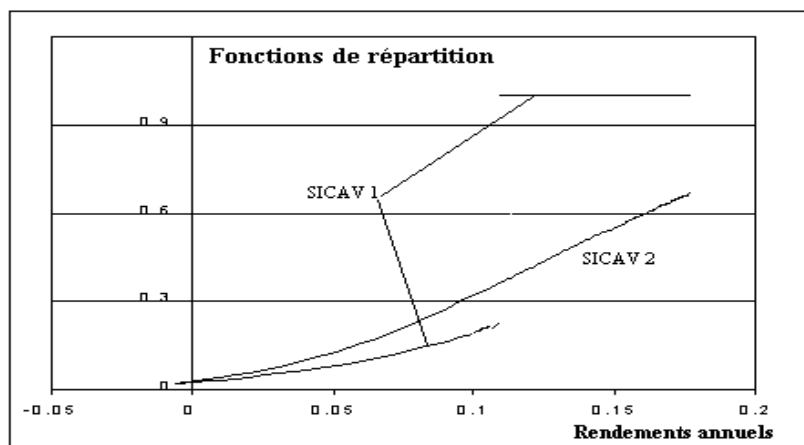
On construit alors la fonction de répartition :



### 5.3 Notion de dominance stochastique

La comparaison des deux investissements pose problème. En effet, en fonction du rendement minimum espéré, l'investisseur va choisir l'un ou l'autre des investissements. En représentant sur un même graphique les fonctions de répartition associées aux deux investissements, on voit apparaître un problème de dominance stochastique. Rappelons en ce cas que l'actif dominant correspond toujours à la fonction de répartition inférieure, cette dernière pouvant être vue comme une mesure du risque.

Dans le cas de notre exemple, on trouve :



On vérifie que pour toute attente de rendement annuel inférieure à  $\tau = 0.1096$ , le premier investissement est préférable. Dans l'espoir d'un rendement plus élevé, il faut choisir l'investissement dans la deuxième SICAV.

#### 5.4 SICAV à cliquets

La SICAV à cliquets est également un actif financier basé sur un autre actif financier, appelé le sous-jacent. Elle ne se valorise que si le sous-jacent lui-même prend de la valeur. Comme plus haut, le sous-jacent peut-être une action, un panier d'actions ou encore, le plus fréquemment, un indice boursier.

L'organisme émetteur de la SICAV garantit à l'investisseur un rendement minimum. Ce dernier est souvent égal à 0% brut, ce qui permet à l'investisseur de toujours retrouver son capital de départ, hors frais, même en cas de baisse du sous-jacent, mais on rencontre des SICAV à rendement minimum négatif. L'existence d'une *barrière absorbante* en 0 donne l'illusion de l'absence de risque et constitue un argument commercial non négligeable. Dans les cas favorables, la SICAV sera valorisée à raison de tout ou partie de la hausse du sous-jacent avec généralement un rendement maximum. Le principe du cliquet bloque les gains acquis au cours d'une période, même lorsque la période suivante, le sous-jacent est moins performant.

Le rendement total de l'investisseur est par définition égal à la *somme* des rendements calculés à intérêt simple pour chaque période. On a

donc pour une SICAV de durée  $n$  périodes, un rendement total  $r_{total}$  égal à :

$$r_{total} = \sum_{k=1}^n r_k \quad (24)$$

Les  $r_k$  sont des variables aléatoires dont on obtient la distribution à partir de la modélisation du sous-jacent. Considérons un actif modélisé par un brownien *géométrique* basé sur un rendement de tendance  $r$  et de volatilité  $\sigma$  et suivant donc l'équation :

$$C(t) = C(0)e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})t}.e^{\sigma w(t)}$$

A chaque réalisation de ce sous-jacent, correspond une et une seule valeur de  $r_k$  définie par :

$$r_k = \frac{C(k) - C(k-1)}{C(k-1)} \quad (25)$$

$$= e^{(r-\frac{\sigma^2}{2}).e^{\sigma w(1)} - 1} \quad (26)$$

On constate que les rendements calculés sur base de l'intérêt simple sont distribués lognormalement à une constante près. Lorsque des barrières absorbantes sont introduites (rendement minimum et/ou maximum), la distribution comporte deux points massiques dont les poids de probabilité sont aisément calculables. Pour construire la distribution de la somme de deux ou plusieurs variables aléatoires de ce type, il faut effectuer la convolution de leur fonction densité et de leur fonction de répartition respectives. Le chapitre qui suit décrit en détail comment effectuer cette convolution par méthode directe.



# Chapitre 5

## CONVOLUTION SEMI-DISCRÈTE ET SEMI-CONTINUE

### 1 Présentation

Les produits financiers que nous venons d'introduire font intervenir des sommes de variables aléatoires que l'on peut modéliser au moyen de lognormales modifiées et tronquées. Il convient de construire la distribution de probabilité de cette variable "somme". Théoriquement, le problème se réduit à une suite de convolutions. Pratiquement, les choses sont un peu plus complexes.

Il est possible d'effectuer la convolution de deux fonctions de manière très efficace et très rapide en passant par les transformées de Fourier. Malheureusement, le traitement des points de discontinuité pose problème. On sait que la transformée de Fourier d'une fonction en un de ses points de discontinuité converge théoriquement vers la moyenne arithmétique des limites à gauche et à droite de la fonction en ce point. Les méthodes numériques usuelles traitent mal ces points de discontinuité.

Pour pallier les inconvénients liés aux méthodes de calculs des transformées de Fourier rapides qui ne donnent pas de résultats satisfaisants, nous allons montrer comment construire la convolution de manière directe dans le cas particulier des distributions doublement tronquées.

### 2 Rappels mathématiques

Soit  $g(x)$  et  $h(x)$  deux fonctions quelconques. La convolution de  $g$  par  $h$  est par définition:

$$[g * h](x) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau) h(x - \tau) d\tau \quad (27)$$

L'utilité du produit de convolution est immédiate dans le contexte qui nous intéresse. En effet, considérons deux variables indépendantes

$X_1$  et  $X_2$  de fonctions de répartition respectives  $F_1(x)$  et  $F_2(x)$ . La fonction de répartition de la variable somme est donnée par :

$$F_{X_1+X_2}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(x - \tau) dF_2(\tau)$$

$$F_{X_1+X_2}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_2(x - \tau) dF_1(\tau)$$

On constate que la définition mathématique de la convolution fait intervenir une intégrale, et qu'elle nécessitera, en pratique, de nombreux calculs.

### 3 Conventions et notations

Afin de conserver un maximum de clarté dans des expressions mathématiques quelque peu complexes, nous adopterons les conventions de notations suivantes :

- l'opérateur '\*' sera utilisé pour noter le produit de convolution;
- soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires. Leurs fonctions densité de probabilité respectives sont notées  $f_X$  et  $f_Y$ , et leurs fonctions de répartition respectivement  $F_X$  et  $F_Y$ . En particulier la fonction de répartition de la variable somme  $X + Y$  sera notée  $F_{X+Y}$ ;
- la fonction résultant de la convolution de deux fonctions sera identifiée par une lettre capitale. Ainsi, la convolution de la fonction  $g(x)$  par la fonction  $h(x)$  sera notée :

$$F(x) = [g * h](x) \quad (28)$$

- dans le cas de la somme de plusieurs variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, certaines fonctions intermédiaires sont le résultat de plusieurs convolutions successives. Nous convenons de leur attribuer un indice numérique dont la valeur correspond au nombre de convolutions qui ont été nécessaires à leur obtention.

- la fonction de répartition d'une variable aléatoire  $X$  ayant pour fonction densité de probabilité  $f_X$  sera notée  ${}_0F_X$ .

L'indice 0 ne perd pas son sens ici. En effet, aucune convolution n'a été nécessaire pour calculer la fonction de répartition de  $X$ .

- On note alors  ${}_1F_X = f_X * {}_0F_X$ . Lors de la convolution suivante, la fonction résultante sera notée  ${}_2F_X$ , avec :  ${}_2F_X = f_X * {}_1F_X$ .

## 4 Fonctions de répartition de variables mi-discrètes mi-continues

Soit  $f_X$  la fonction densité de probabilité, d'une variable aléatoire  $X$ , possédant deux points massiques en  $x_1$  et  $x_2$  auxquels on attribue respectivement la probabilité  $p_1$  et  $p_2$ . Par définition, cette fonction est supposée identiquement nulle en dehors de l'intervalle  $[x_1, x_2]$ . On introduit les fonctions annexes  $h_i(x), i = 1, 2$  définies comme suit :

$$\begin{aligned} h_i(x) &= 0 \text{ si } x < x_i \\ h_i(x) &= 1 \text{ si } x \geq x_i \end{aligned}$$

La variable aléatoire ainsi définie a pour fonction de répartition :

$${}_0F_X(x) = p_1 h_1(x) + \int_{x_1}^x f(s) ds + p_2 h_2(x) \quad (29)$$

avec :

$$p_1 + p_2 + \int_{x_1}^{x_2} f(s) ds = 1 \quad (30)$$

## 5 Théorème de convolution

Si  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires possédant deux points massiques en  $x_1$  et  $x_2$  auxquels on attribue respectivement la probabilité  $p_1$  et  $p_2$ , et ayant pour fonction de répartition respective :

$$\begin{aligned} {}_0F_X(x) &= p_1 h_1(x) + \int_{x_1}^x f_X(s) ds + p_2 h_2(x) \\ {}_0F_Y(x) &= p_1 h_1(x) + \int_{x_1}^x f_Y(s) ds + p_2 h_2(x) \end{aligned}$$

La somme des variables  $X$  et  $Y$  a pour fonction de répartition :

$${}_1F_{X+Y}(x) = p_1 {}_0F_Y(x-x_1) + \int_{x_1}^{x_2} f_X(s) {}_0F_Y(x-s) ds + p_2 {}_0F_Y(x-x_2) \quad (31)$$

## 6 Première convolution

### 6.1 Equation de départ

Soit  $X_1$  et  $X_2$  des variables aléatoires identiquement distribuées et indépendantes, dont la fonction densité de probabilité possède deux points massiques, respectivement en  $x_1$  et  $x_2$ . Soit  $Z$  la variable aléatoire définie par  $Z = X_1 + X_2$ . Réécrivons donc (31) dans ce cas particulier :

$${}_1F_{X+X}(x) = p_1 {}_0F_X(x-x_1) + \int_{x_1}^{x_2} f_X(s) {}_0F_X(x-s) ds + p_2 {}_0F_X(x-x_2) \quad (32)$$

Le cas particulier traité faisant intervenir une somme de variables aléatoires identiquement distribuées, nous noterons plus simplement (32) :

$${}_1F(x) = p_1 {}_0F(x-x_1) + \int_{x_1}^{x_2} f(s) {}_0F(x-s) ds + p_2 {}_0F(x-x_2) \quad (33)$$

Dans un souci pédagogique, nous détaillons les opérations successives avant de donner une présentation générale.

### 6.2 Etude par intervalle de la convolution

Si les variables  $X_1$  et  $X_2$  sont indépendantes et équidistribuées, définies sur  $[x_1, x_2]$  avec deux points massiques en  $x_1$  et  $x_2$ , et avec  $x_1 < x_2$ , la variable  $X_1 + X_2$  est définie sur  $[2x_1, 2x_2]$  avec trois points massiques en  $2x_1$ ,  $x_1 + x_2$ , et  $2x_2$  et  $2x_1 < x_1 + x_2 < 2x_2$ .

1) Si  $x = 2x_1$   
(33) devient :

$$\begin{aligned} {}_1F(2x_1) &= p_1 \cdot \underbrace{F(x_1)}_{\text{discontinuité}} + \underbrace{\int_{x_1}^{x_2} f(s) {}_0F(2x_1 - s) ds}_{=0} \\ &+ \underbrace{p_2 {}_0F(2x_1 - x_2)}_{=0} \end{aligned} \quad (34)$$

Les deuxième et troisième termes sont nuls car  $\forall x < x_1 : {}_0F(x) = 0$ . En effet, si  $x_1 < x_2$ , on vérifie que  $2x_1 - x_2 < x_1$ .

Calculons les limites à gauche et à droite de (34).

**A gauche :**

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2x_1 \\ x < 2x_1}} {}_1F(x) = 0$$

**A droite :**

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2x_1 \\ x > 2x_1}} {}_1F(x) = p_1^2$$

**2) Si  $2x_1 < x < x_1 + x_2$**

(33) devient :

$${}_1F(x) = p_1 \cdot {}_0F(x - x_1) + \int_{x_1}^{x_2} f(s) {}_0F(x - s) ds + p_2 \cdot \underbrace{{}_0F(x - x_2)}_{= 0} \quad (35)$$

Le troisième terme est nul car  $\forall x < x_1 + x_2 : {}_0F(x) = 0$ . En effet si  $x < x_1 + x_2$ , on a  $x - x_2 < x_1$

**3) Si  $x = x_1 + x_2$**

(33) devient :

$$\begin{aligned} {}_1F(x_1 + x_2) &= p_1 \cdot \underbrace{{}_0F(x_2)}_{\text{discontinuité}} + \int_{x_1}^{x_2} f(s) {}_0F(x_1 + x_2 - s) ds \\ &+ p_2 \cdot \underbrace{{}_0F(x_1)}_{\text{discontinuité}} \end{aligned}$$

Calculons les limites à gauche et à droite de cette expression.

**A gauche :**

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow x_1 + x_2 \\ x < x_1 + x_2}} {}_1F(x - x_1) &= p_1 \cdot \underbrace{\lim_{\substack{x \rightarrow x_1 + x_2 \\ x < x_1 + x_2}} {}_0F(x)}_{= 1 - p_2} + \int_{x_1}^{x_2} f(s) {}_0F(x_1 + x_2 - s) ds \\ &+ p_2 \cdot \underbrace{\lim_{\substack{x \rightarrow x_1 + x_2 \\ x < x_1 + x_2}} {}_0F(x - x_2)}_{= 0} \\ &= p_1(1 - p_2) + \int_{x_1}^{x_2} f(s) {}_0F(x_1 + x_2 - s) ds \end{aligned}$$

**A droite :**

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow x_1+x_2 \\ x > x_1+x_2}} {}_1F(x-x_1) &= p_1 \cdot \underbrace{\lim_{\substack{x \rightarrow x_1+x_2 \\ x > x_1+x_2}} {}_0F(x)}_{=1} + \int_{x_1}^{x_2} f(s) {}_0F(x_1+x_2-s) ds \\ &+ p_2 \underbrace{\lim_{\substack{x \rightarrow x_1+x_2 \\ x > x_1+x_2}} {}_0F(x-x_2)}_{=p_1} \\ &= p_1 + \int_{x_1}^{x_2} f(s) {}_0F(x_1+x_2-s) ds + p_1 \cdot p_2 \end{aligned}$$

**4) Si  $x_1 + x_2 < x < 2x_2$**   
 (33) devient :

$${}_1F(x) = p_1 \underbrace{{}_0F(x-x_1)}_{=1} + \int_{x_1}^{x_2} f(s) {}_0F(x-s) ds + p_2 {}_0F(x-x_2) \quad (36)$$

**5) Si  $x = 2x_2$**   
 (33) devient :

$${}_1F(x) = p_1 \underbrace{{}_0F(2x_2-x_1)}_{=1} + \int_{x_1}^{x_2} f(s) {}_0F(2x_2-s) ds + p_2 \underbrace{{}_0F(x_2)}_{\text{discontinuité}} \quad (37)$$

Le deuxième terme de cette expression vaut  $1 - p_1 - p_2$ . En effet,  
 $\forall x_1 < s < x_2 :$

$${}_0F(2x_2-s) = 1$$

et

$$\int_{x_1}^{x_2} f(s) ds = 1 - p_1 - p_2$$

(cf. 30). (37) peut donc se réécrire en :

$${}_1F(x) = p_1 + (1 - p_1 - p_2) + p_2 \underbrace{{}_0F(x_2)}_{\text{discontinuité}} \quad (38)$$

Calculons les limites à gauche et à droite de (38) :

**A gauche :**

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{x \rightarrow 2x_2 \\ x < 2x_2}} {}_1F(x) &= p_1 + (1 - p_1 - p_2) + p_2 \underbrace{\lim_{\substack{x \rightarrow 2x_2 \\ x < 2x_2}} {}_0F(x - x_2)}_{= 1 - p_2} \quad (39) \\
&= p_1 + 1 - p_1 - p_2 + p_2 \cdot (1 - p_2) = 1 - p_2^2
\end{aligned}$$

**A droite :**

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{x \rightarrow 2x_2 \\ x > 2x_2}} {}_1F(x) &= p_1 + (1 - p_1 - p_2) + p_2 \underbrace{\lim_{\substack{x \rightarrow 2x_2 \\ x > 2x_2}} {}_0F(x - x_2)}_{= 1} \quad (40) \\
&= p_1 + 1 - p_1 - p_2 + p_2 = 1
\end{aligned}$$

### 6.3 Analyse des points de discontinuité

Étudions la hauteur des sauts aux points de discontinuité. La première convolution met en évidence trois points de discontinuité en  $2x_1$ ,  $x_1 + x_2$  et  $2x_2$ . La hauteur du saut se calcule par la différence entre la limite à droite et à gauche de la courbe au point de discontinuité considéré.

1) En  $x = 2x_1$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2x_1 \\ x > 2x_1}} {}_1F(x) - \lim_{\substack{x \rightarrow 2x_1 \\ x < 2x_1}} {}_1F(x) = p_1^2 - 0 = p_1^2 \quad (41)$$

2) En  $x = x_1 + x_2$

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{x \rightarrow x_1 + x_2 \\ x > x_1 + x_2}} {}_1F(x) - \lim_{\substack{x \rightarrow x_1 + x_2 \\ x < x_1 + x_2}} {}_1F(x) &= \left[ \begin{aligned} & p_1 + \int_{x_1}^{x_2} f(s) {}_0F(x - s) ds + p_1 p_2 \\ & - p_1(1 - p_2) + \int_{x_1}^{x_2} f(s) {}_0F(x - s) ds \end{aligned} \right] \\
&= 2p_1 p_2 \quad (42)
\end{aligned}$$

3) En  $x = 2x_2$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2x_2 \\ x > 2x_2}} {}_1F(x) - \lim_{\substack{x \rightarrow 2x_2 \\ x < 2x_2}} {}_1F(x) = 1 - (1 - p_2^2) = p_2^2 \quad (43)$$

**Conclusion**

On constate que les hauteurs des sauts aux points de discontinuité coïncident avec les termes du développement d'un binôme de Newton. En effet :

$$p_1^2 + 2p_1p_2 + p_2^2 = (p_1 + p_2)^2$$

## 7 Deuxième convolution

### 7.1 Equation de départ

Soit  $X_i$ ;  $i = 1, 2, 3$  des variables aléatoires identiquement distribuées, indépendantes dont la fonction densité de probabilité possède deux points massiques, respectivement en  $x_1$  et  $x_2$ . Soit  $W$  la variable aléatoire définie par  $W = X_1 + X_2$  et soit  $Z$  la variable aléatoire définie par  $Z = W + X_3 = (X_1 + X_2) + X_3$ .

Réécrivons (31) :

$${}_2F_{X+(X+X)}(x) = f_X(x) * {}_1F_{X+X}(x) \quad (44)$$

$$\begin{aligned} &= p_1 {}_1F_{X+X}(x - x_1) + \int_{x_1}^{x_2} f_X(s) {}_1F_{X+X}(x - s) ds \\ &+ p_2 {}_1F_{X+X}(x - x_2) \end{aligned} \quad (45)$$

Comme plus haut, nous notons (44) :

$${}_2F(x) = f(x) * {}_1F(x) \quad (46)$$

$$= p_1 {}_1F(x - x_1) + \int_{x_1}^{x_2} f(s) {}_1F(x - s) ds + p_2 {}_1F(x - x_2)$$

### 7.2 Points de discontinuité

Il est inutile ici de recommencer un calcul détaillé en tout point semblable à celui que nous venons de présenter. Les points de discontinuité de la variable  $Z$  sont observés en  $3x_1, 2x_1 + x_2, x_1 + 2x_2$  et  $3x_2$ .

On calcule successivement :

1) **En**  $x = 3x_1$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 3x_1 \\ x > 3x_1}} {}_2F(x) - \lim_{\substack{x \rightarrow 3x_1 \\ x < 3x_1}} {}_2F(x) = p_1^3 \quad (47)$$

2) **En**  $x = 2x_1 + x_2$



$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2x_1+x_2 \\ x > 2x_1+x_2}} {}_2F(x) - \lim_{\substack{x \rightarrow 2x_1+x_2 \\ x < 2x_1+x_2}} {}_2F(x) = 3p_1^2 p_2 \quad (48)$$

3) En  $x = x_1 + 2x_2$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_1+2x_2 \\ x > x_1+2x_2}} {}_2F(x) - \lim_{\substack{x \rightarrow x_1+2x_2 \\ x < x_1+2x_2}} {}_2F(x) = 3p_1 p_2^2 \quad (49)$$

3) En  $x = 3x_2$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 3x_2 \\ x > 3x_2}} {}_2F(x) - \lim_{\substack{x \rightarrow 3x_2 \\ x < 3x_2}} {}_2F(x) = p_2^3 \quad (50)$$

### Conclusion

La hauteur des sauts aux points de discontinuité correspondant à la deuxième convolution, donc traduisant la somme de 3 variables, suivent les termes du développement d'un binôme de Newton de puissance 3. En effet on a :

$$p_1^3 + 3p_1^2 p_2 + 3p_1 p_2^2 + p_2^3 = (p_1 + p_2)^3$$

## 8 Généralisation

Les deux premières convolutions nous amènent à énoncer la règle suivante :

*Enoncé. Soit  $X_i$   $i = 1, \dots, n$  une famille de variables aléatoires indépendamment distribuées et indépendantes dont la fonction densité de probabilité possède deux points massiques en  $x_1$  et  $x_2$  de probabilités respectives  $p_1$  et  $p_2$ . Soit  $Y$  la variable aléatoire définie par :*

$$Y = \sum_{i=1}^n X_i$$

*Cette variable présente alors  $(n+1)$  points de discontinuité en  $nx_1, (n-1)x_1 + x_2, \dots, nx_2$ . La différence entre la limite à droite et à gauche au  $i^{\text{ème}}$  point de discontinuité de la fonction répartition de  $Y$  est égale au  $i^{\text{ème}}$  terme du binôme de Newton  $(p_1 + p_2)^n$ .*

### 8.1 Justification intuitive

La conclusion énoncée ci-dessus et obtenue sur base d'exemples peut se démontrer par récurrence. Nous avons calculé la fonction de répartition de la variable aléatoire  $Y$  définie par :

$$Y = X_1 + X_2 \quad (51)$$

Reprenons chacun des points de discontinuité apparaissant dans la première convolution.

1. Les variables sont définies sur  $\mathfrak{R}^+$ . Quel est alors le poids de probabilité associé à  $2x_1$ , c'est-à-dire quelle est l'amplitude du premier saut ? C'est tout simplement la probabilité que  $X_1$  soit rigoureusement égale à  $x_1$  (soit  $p_1$ ), *et* que  $X_2$  soit également rigoureusement égale à  $x_1$  (probabilité  $p_1$ ). Le "*et*" de la phrase précédente indique bien qu'il s'agit de la probabilité pour que les deux événements se produisent simultanément. C'est donc le produit des probabilités de chacun des événements pris séparément, soit  $p_1^2$ . C'est le résultat auquel nous sommes arrivés dans les sections précédentes.
2. Intéressons-nous au deuxième saut. Quelle est le poids de probabilité associée aux événements massiques intervenant dans  $Y = x_1 + x_2$ . C'est la probabilité que  $X_1$  soit égale à  $x_1$ , soit  $p_1$ , *et* que  $X_2 = x_2$ , soit  $p_2$ , *ou*, réciproque de l'expression précédente, que  $X_2$  soit égale à  $x_1$ , soit  $p_1$ , *et* que  $X_1 = x_2$ , soit  $p_2$ . Le "*et*" de la phrase précédente indique bien qu'il s'agit de la probabilité pour que les deux événements se produisent simultanément alors que le "*ou*" exprime que soit l'un soit l'autre des deux événements doit se produire. Dans ce dernier cas, la probabilité s'exprime par la somme des probabilités de chacun des événements pris séparément. On a une amplitude :

$$\begin{aligned} A &= P \{[(X_1 = x_1) \wedge (X_2 = x_2)] \vee [(X_2 = x_1) \wedge (X_1 = x_2)]\} \\ &= p_1 p_2 + p_1 p_2 = 2 p_1 p_2 \end{aligned}$$

3. Le deuxième saut est traité par un raisonnement similaire et l'on obtient évidemment :

$$P[Y = 2x_2] = P[X_1 = x_2] \wedge (X_2 = x_2)] = p_2^2$$

Le raisonnement est le même dans le cas d'un nombre quelconque de convolutions.

## 8.2 Démonstration

La démonstration se fait par récurrence. Nous avons vu que la propriété était vraie après une convolution. Considérons la propriété comme acquise pour les  $k - 1$  premières convolutions représentant la fonction de répartition de la variable somme de  $k$  variables identiques possédant chacune deux points massiques en  $x_1$  et  $x_2$ . On peut écrire :

$$\begin{aligned} {}_k F(x) &= p_{1 \cdot k-1} F(x - x_1) + \int_{x_1}^{x_2} f(s) \cdot {}_{k-1} F(x - s) ds \\ &+ p_{2 \cdot k-1} F(x - x_2) \end{aligned} \quad (52)$$

Par hypothèse, l'amplitude des discontinuités relatives à la fonction  ${}_{k-1} F(x)$  suit les termes du développement du binôme de Newton. Notons pour la commodité,

$$S(k, l)$$

l'amplitude du  $l^e$  saut ( $l = 0, \dots, k$ ) de la fonction de répartition correspondant à la  $(k - 1)^e$  convolution (avec  $k \geq 1$ ), c'est-à-dire décrivant la variable aléatoire *somme* de  $k$  variables identiques comme définies plus haut. On a par hypothèse :

$$S(k, l) = C_k^l p_1^{k-l} p_2^l$$

Dans le cas particulier qui nous occupe, le  $l^e$  saut correspondant à la  $k^e$  convolution (et donc à la somme de  $(k + 1)$  variables) se situe à la valeur  $(k + 1 - l)x_1 + lx_2$ . L'expression initiale (52) devient :

$$\begin{aligned} {}_k F((k + 1 - l)x_1 + lx_2) &= p_{1 \cdot k-1} F((k - l)x_1 + lx_2) \\ &+ \int_{x_1}^{x_2} f(s) {}_{k-1} F((k + 1 - l)x_1 + lx_2 - s) ds \\ &+ p_{2 \cdot k-1} F((k - (l - 1))x_1 + (l - 1)x_2) \end{aligned}$$

Les discontinuités ne concernent que les termes (1) et (3). On peut donc écrire :

$$S(k + 1, l) = p_1 S(k, l) + p_2 S(k, l - 1)$$

Un calcul élémentaire utilisant des propriétés bien connues des combinaisons montre que :

$$\begin{aligned} S(k+1, l) &= p_1 \cdot C_k^l \cdot p_1^{k-l} \cdot p_2^l + p_2 \cdot C_k^{l-1} \cdot p_1^{k-(l-1)} \cdot p_2^{l-1} \\ &= C_{k+1}^l \cdot p_1^{k+1-l} \cdot p_2^l \end{aligned}$$

vérifiant ainsi la propriété pour  $l = 0, \dots, k$ . Dans le cas où  $l = k+1$ , on constate que le premier point de discontinuité considéré dans l'expression (52) disparaît (ce point situé au delà de l'intervalle de définition de la variable se voit attribuer une fonction de répartition égale à 1). On obtient alors :

$$S(k+1, k+1) = p_2^{k+1}$$

ce qui achève la démonstration.

## 9 L'intégration

L'ensemble de ce chapitre nous a montré clairement que pour calculer des convolutions de fonctions, la méthode directe demande d'effectuer un grand nombre d'intégrations.

Il existe de nombreux procédés d'intégration numérique<sup>38</sup>, chacun s'adaptant à des cas particuliers de fonctions. Nous ne nous intéresserons qu'aux formules permettant de traiter un axe des abscisses divisé en intervalles égaux.

L'axe des abscisses sera donc divisé en un certain nombre de points situés aux extrémités d'intervalles successifs de longueur  $h$ . Ces points seront dénotés  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_N, x_{N+1}$ . De manière plus formelle, nous aurons donc sur l'axe des  $x$ , un ensemble de points  $x_i$  :

$$x_i = x_0 + ih \qquad i = 0, 1, 2, \dots, N+1$$

De même, la fonction que nous souhaitons intégrer sera définie pour l'ensemble des  $x_i$  :

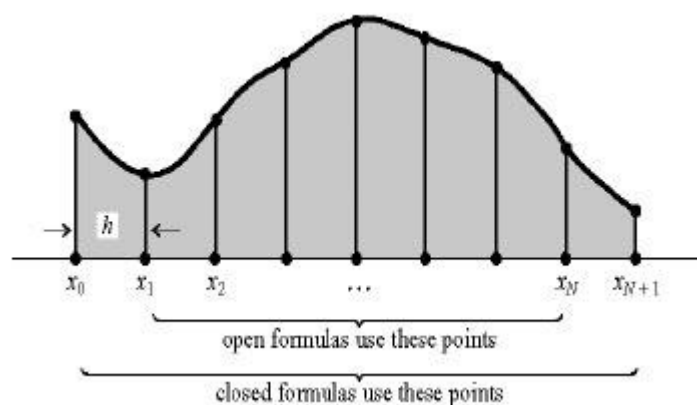
$$f(x_i) \equiv f_i$$

Nous souhaitons intégrer la fonction entre deux points  $a$  et  $b$ . Si la formule d'intégration utilise la valeur de la fonction  $f$  en les points

<sup>38</sup>Le reste de cette section est partiellement constitué d'une synthèse des pages 129-140 du chapitre 4 de [52].

$a$  et  $b$ , à savoir  $f(a)$  et  $f(b)$ , la formule est dite fermée. Dans le cas contraire, elle est dite ouverte. Dans la suite du travail, nous ne considérerons que des formules fermées.

Intégration d'une fonction entre les points  $x_0$  et  $x_{N+1}$  pour laquelle l'axe des abscisses est divisé en points également espacés. Les formules fermées utilisent la valeur de la fonction en ces points extrêmes, les formules ouvertes ne le font pas.



La formule de base est celle de *Newton-Cotes*, aussi appelée *règle des trapèzes*.

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = h \left[ \frac{1}{2} f_1 + \frac{1}{2} f_2 \right] + O(h^3 f'') \quad (53)$$

Le terme en  $O()$  signifie que la valeur réelle de l'intégrale diffère de la valeur calculée. Il fait intervenir le produit du cube de l'écart entre deux points de l'axe des abscisses et la valeur de la dérivée seconde de la fonction d'un certain point de l'intervalle  $[x_1, x_2]$ . Il ne sera pas étudié en détail ici. Le lecteur intéressé pourra consulter [52] pour une description plus approfondie. On voit clairement dans (53) que la fonction n'est évaluée qu'en deux de ses points. Cette formule donne une valeur exacte pour des fonctions polynomiales jusqu'au degré 1, soit du type  $f(x) = ax + b$ .

Pour accroître la précision de calcul pour des polynômes d'un degré supérieur, on peut utiliser la *formule de Simpson* :

$$\int_{x_1}^{x_3} f(x) dx = h \left[ \frac{1}{3}f_1 + \frac{4}{3}f_2 + \frac{1}{3}f_3 \right] + O\left(h^5 f^{(4)}\right) \quad (54)$$

L'accroissement de précision se marque par le fait que le terme correcteur est une fonction du produit de la dérivée quatrième de la fonction par la puissance cinquième de l'écart entre deux points de l'axe des abscisses. Cette formule donne une valeur exacte pour des fonctions polynomiales jusqu'au degré 3, soit du type  $f(x) = x^3$ .

Pour des polynômes jusqu'au degré 4, la précision du calcul peut encore être accrue en passant à la formule  $\frac{3}{8}$  de Simpson :

$$\int_{x_1}^{x_4} f(x) dx = h \left[ \frac{3}{8}f_1 + \frac{9}{8}f_2 + \frac{9}{8}f_3 + \frac{3}{8}f_4 \right] + O\left(h^5 f^{(4)}\right) \quad (55)$$

Et finalement, dernière formule dont nous parlerons, valable pour des polynômes jusqu'au degré 5, la *formule de Bode* peut être utilisée :

$$\int_{x_1}^{x_5} f(x) dx = h \left[ \frac{14}{45}f_1 + \frac{64}{45}f_2 + \frac{24}{45}f_3 + \frac{64}{45}f_4 + \frac{14}{45}f_5 \right] + O\left(h^7 f^{(6)}\right) \quad (56)$$

Cette liste n'est bien entendu pas exhaustive et il existe nombre d'autres formules pour des polynômes d'ordre encore plus élevé. Au delà du degré 5, elle cesse toutefois de porter le nom de mathématiciens connus.

Revenons à (53). Cette formule peut être utilisée  $N-1$  fois, pour calculer l'intégrale de la fonction dans les intervalles  $(x_1, x_2), (x_2, x_3), \dots, (x_{N-1}, x_N)$ . Nous obtenons ainsi la *règle des trapèzes étendue* :

$$\int_{x_1}^{x_N} f(x) dx = h \left[ \frac{1}{2}f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_{N-1} + \frac{1}{2}f_N \right] + O\left(\frac{(b-a)^3 f''}{N^2}\right) \quad (57)$$

Cette formule est à la base de la plupart des modèles d'intégration numérique pour deux raisons essentielles, la première assez évidente, la seconde peut-être plus obscure.

La première raison est que pour intégrer une fonction  $f(x)$  donnée entre deux points  $a$  et  $b$ , on peut doubler le nombre d'intervalles intervenant dans la formule sans perdre le bénéfice du travail précédemment

effectué. L'estimation la plus grossière de l'intégrale est de ne considérer la fonction qu'aux points  $a$  et  $b$  :

$$\int_a^b f(x) dx = h \left[ \frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}f(b) \right]$$

Pour affiner le résultat, on peut rajouter un troisième point  $x_1$  au milieu du segment  $(a, b)$  :

$$\int_a^b f(x) dx = h \left[ \frac{1}{2}f(a) + f(x_1) + \frac{1}{2}f(b) \right]$$

Pour encore plus de précision, on peut rajouter deux points supplémentaires, respectivement au milieu des segments  $(a, x_1)$  et  $(x_1, b)$ . Et ainsi de suite jusqu'à l'obtention de la précision souhaitée.

La subdivision de l'axe des abscisses en un nombre croissant de points permet d'augmenter la précision des calculs sans perdre le bénéfice des calculs précédemment effectués. L'estimation la plus grossière de l'intégrale consiste à ne prendre que les points extrêmes. Un premier raffinement s'obtient en rajoutant un point au milieu du segment défini par les deux points précédents ( $N = 2$ ). Un deuxième raffinement consiste à subdiviser chacun des deux segments obtenus en deux sous-segments par l'ajout d'un point supplémentaire en leur milieu ( $N = 3$ ). Et ainsi de suite jusqu'à l'obtention de la précision souhaitée.

# Chapitre 6

## SICAV À CLIQUETS

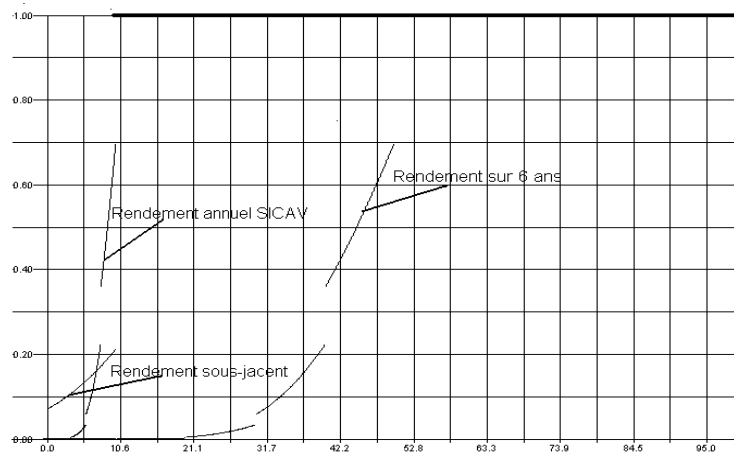
Nous appliquons ici le calcul direct de la convolution à quatre produits représentatifs du marché. Chacun de ces produits est accompagné de sa fiche technique décrivant ses caractéristiques principales. Nous comparons les distributions de probabilité de ces produits en fin de chapitre.

### 1 ES-FIX EQUITY 4

#### 1.1 Fiche technique

- **Type d'investissement** : fonds dont le résultat est lié à l'évolution de l'indice boursier AEX néerlandais. Blocages annuels des progressions boursières avec un maximum de 10%;
- **Echéance** : 9 mai 2002;
- **Durée** : 5 ans;
- **Montant de remboursement à l'échéance (hors frais)** : le capital investi lors de la période de souscription initiale majoré de la somme des hausses "bloquées" (maximum 10% par an);
- **Période de souscription initiale** : du 14 au 30 avril 1997;
- **Droit d'entrée** : 1% durant la période de souscription initiale (avec un minimum de 1 000,- BEF et un maximum de 100 000,- BEF);
- **Droit de sortie** : aucun à l'échéance;
- **Taxe boursière** : 1% (max 15 000,- BEF par opération) à l'entrée et 0.5% (max 15 000,- BEF par opération) à la sortie;
- **Précompte mobilier** : pas de précompte en Belgique.





## 1.2 Analyse

Le graphique ci-dessus reprend :

1. la fonction de répartition des taux de rendement annuel de l'indice AEX à laquelle on a introduit deux points massiques pour les rendements 0% et 10%. Au premier de ces points on attribue comme poids la probabilité que l'indice offre un rendement négatif et au deuxième on attribue la probabilité 1. Cette courbe est établie sur base de l'analyse des cours de clôture entre le 4 janvier 1993 et la 5 août 1999. Durant cette période, l'indice a montré une tendance croissante de 21.63% avec une volatilité de 14.69%;
2. la fonction de répartition des taux de rendement de la sicav à l'échéance (courbe sur la droite),
3. la fonction de répartition du taux de rendement annuel équivalent. Pour rappel, on a :

$$x = \sqrt[n]{\frac{e^{rn} (1 - T_o)}{(1 + F + T_i)}} - 1$$

avec :

- $x$  : le rendement annuel offert par la sicav à cliquet,
- $n$  : le nombre d'années (5 dans ce cas-ci),

- $r_n$  : la variable aléatoire décrivant le rendement de la sicav après  $n$  années,
- $T_i$  et  $T_o$  : respectivement la taxe boursière lors de l'achat et la vente d'un actif financier, soit 1% et 0.5%,
- $F$  : les frais prélevés par l'organisme émetteur de la sicav, soit 1% dans ce cas-ci.

On constate que pour des rendements inférieurs à 7.25%, (correspondant à l'intersection des deux courbes), la sicav offre, à rendement égal, un risque plus faible pour l'investisseur que s'il avait directement investi dans un portefeuille diversifié de titres cotés à la bourse d'Amsterdam. En effet, la fonction de répartition des rendements annuels équivalents étant "sous" la courbe de l'indice, la sicav offre donc une probabilité plus faible que le rendement soit inférieur à une valeur donnée. Par contre, pour les rendements supérieurs à 7.5%, investir directement dans un portefeuille diversifié de titres cotés à la bourse d'Amsterdam est plus intéressant.

Le rendement total de la sicav, hors frais, ne dépasse pas 50%, et il y a une chance sur deux (probabilité de 50%), qu'il soit inférieur à 44.5%. Ces deux valeurs correspondent respectivement à des rendements annuels de 9.95% et 8.7%.

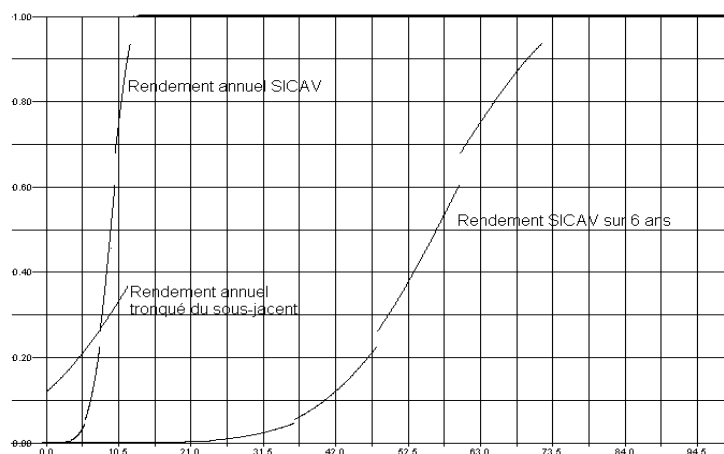
## 2 ES-FIX EQUITY 10

### 2.1 Fiche technique

- **Type d'investissement** : fonds dont le résultat est lié à l'évolution de l'indice boursier BEL-20 belge. Blocages annuels des progressions boursières avec un maximum de 12%;
- **Echéance** : 6 novembre 2003;
- **Durée** : 6 ans;
- **Montant de remboursement à l'échéance (hors frais)** : le capital investi lors de la période de souscription initiale majoré de la somme des hausses "bloquées" (maximum 12% par an);
- **Période de souscription initiale** : du 13 au 29 octobre 1997;

- **Droit d'entrée** : 1.5% durant la période de souscription initiale (avec un minimum de 1 000,- BEF et un maximum de 100 000,- BEF);
- **Droit de sortie** : aucun à l'échéance;
- **Taxe boursière** : 1% (max 15 000,- BEF par opération) à l'entrée et 0.5% (max 15 000,- BEF par opération) à la sortie;
- **Précompte mobilier** : pas de précompte en Belgique.

## 2.2 Analyse



Le rendement total de la sicav, hors frais, ne dépassera pas 72%. Il y a une chance sur deux d'obtenir un rendement inférieur à 56%. Ces deux valeurs correspondent respectivement à des rendements annuels de 10.15% et 9.3%.

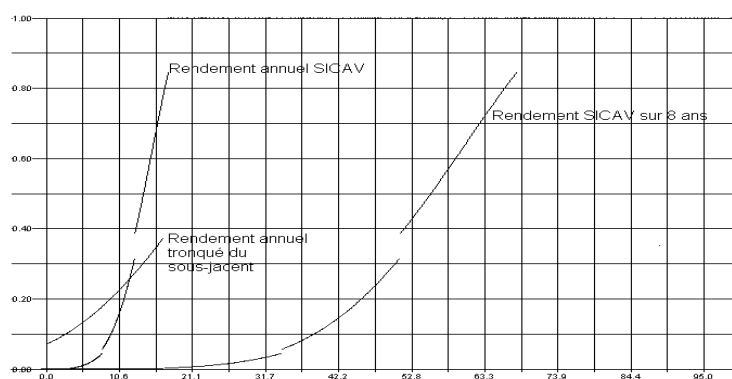
Le choix de l'investisseur se portera sur la sicav si le rendement minimum exigé ne dépasse pas 7.75%, et sur un investissement en bourse sans intermédiaire, dans le cas contraire.

### 3 ES-FIX EQUITY 23

#### 3.1 Fiche technique

- **Type d'investissement** : fonds dont le résultat est lié à l'évolution de l'indice boursier AEX néerlandais. Blocages bi-annuels des progressions boursières avec un maximum de 17%
- **Echéance** : 8 décembre 2006;
- **Durée** : 8 ans;
- **Montant de remboursement à l'échéance (hors frais)** : le capital investi lors de la période de souscription initiale majoré de la somme des hausses "bloquées" (maximum 17% par an);
- **Période de souscription** : du 17 au 27 novembre 1998;
- **Droit d'entrée** : 1,5% durant la période de souscription initiale (avec un minimum de 1 000,- BEF et un maximum de 100 000,- BEF);
- **Droit de sortie** : aucun à l'échéance;
- **Taxe boursière** : 1% (max 15 000,- BEF par opération) à l'entrée et 0.5% (max 15 000,- BEF par opération) à la sortie.
- **Précompte mobilier** : pas de précompte en Belgique.

#### 3.2 Analyse



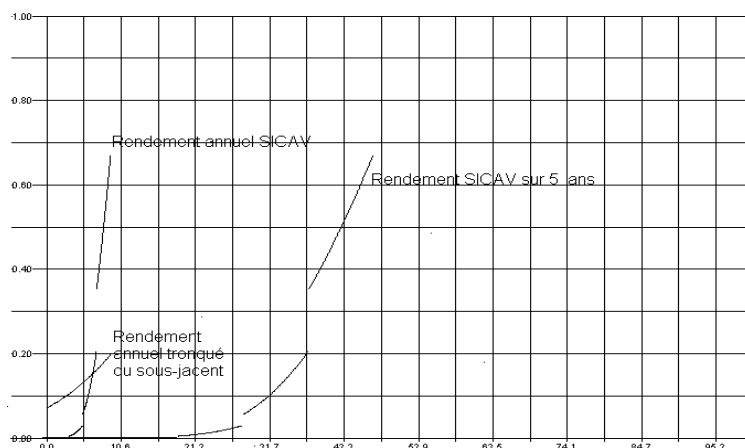
Cette sicav se différencie des autres dans la mesure où le rendement maximum offert est à compter sur une période de deux ans au lieu d'un seul. La seconde courbe (rendement de la sicav à l'échéance) nous montre que le rendement total de la sicav, hors frais, ne dépassera pas 68% et qu'il y a une chance sur deux d'obtenir un rendement inférieur à 55%. Ces deux valeurs correspondent respectivement à un rendement annuel équivalent de 8.45% et 6.7%.

Le choix de l'investisseur se portera sur la sicav si le rendement minimum qu'il exige ne dépasse pas 4.7%, et sur un investissement en bourse directement dans le cas contraire.

## 4 G-EQUITY FIX NETHERLANDS 02-2002

### 4.1 Fiche technique

- **Type d'investissement** : fonds dont le résultat est lié à l'évolution de l'indice boursier AEX néerlandais. Blocages annuels des progressions boursières avec un maximum de 9.3%;
- **Echéance** : 19 février 2002;
- **Durée** : 5 ans;
- **Montant de remboursement à l'échéance (hors frais)** : le capital investi lors de la période de souscription initiale majoré de la somme des hausses "bloquées" (maximum 9.3% par an);
- **Période de souscription initiale** : du 27 janvier au 30 février 1997;
- **Droit d'entrée** : 1.5% durant la période de souscription initiale;
- **Droit de sortie** : aucun à l'échéance;
- **Taxe boursière** : 1% (max 15 000,- BEF par opération) à l'entrée et 0.5% (max 15 000,- BEF par opération) à la sortie;
- **Précompte mobilier** : pas de précompte en Belgique.



## 4.2 Analyse

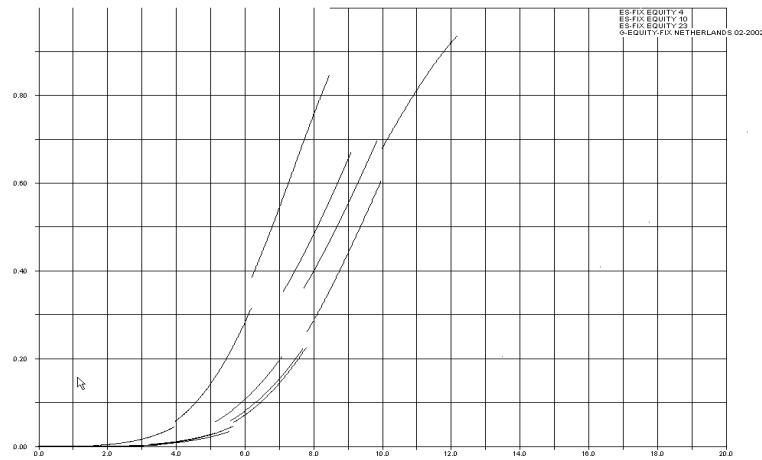
La seconde courbe (rendement de la sicav à l'échéance) nous montre que le rendement total de la sicav, hors frais, ne dépassera pas 46.5% et qu'il y a une chance sur deux d'obtenir un rendement inférieur à 41%. Ces deux valeurs correspondent respectivement à un rendement annuel équivalent de 9.1% et 7.9%.

Le choix de l'investisseur se portera donc sur la sicav si le rendement minimum qu'il exige ne dépasse pas 6.5%, et sur un investissement en bourse directement dans le cas contraire.

## 5 Comparaison des produits

La figure suivante nous guide vers un choix rationnel. Elle montre sur un même graphique la fonction de répartition des variables *rendements annuels* des différents produits étudiés.

De gauche à droite, à mi-hauteur du graphique, nous trouvons les courbes dans l'ordre suivant : ES-FIX EQUITY 23, G-EQUITY FIX, ES-FIX EQUITY 4, ES-FIX EQUITY 10. Cet ordre reste le même jusqu'aux rendements inférieurs à 6% en-deçà desquels la sicav ES-FIX EQUITY 4 devient plus intéressante que ES-FIX EQUITY 10: la probabilité d'avoir un rendement inférieur à un rendement donné devient plus faible pour ES-FIX EQUITY 4 que pour ES-FIX



EQUITY 10. Pour des rendements encore plus faibles, les différences entre ES-FIX EQUITY 4, ES-FIX EQUITY 10 et ES-FIX EQUITY 4 s'amenuisent de plus en plus. Seule reste définitivement éliminée, quelque que soit le rendement minimum que désire l'investisseur ES-FIX EQUITY 23.