Encadré ou article à part entière ?

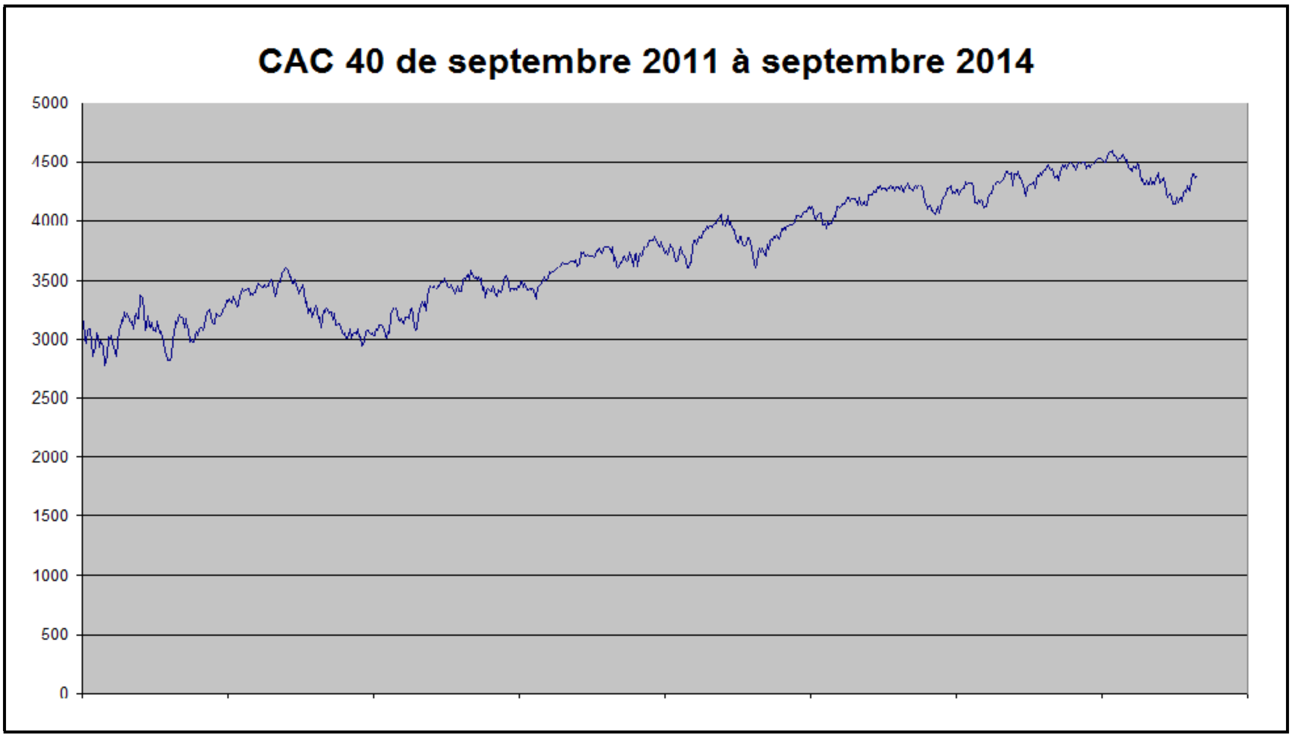
Qu'en est-il en pratique du modèle lognormal ?
Le phénomène de leptokurticité expliqué

Daniel Justens

Le modèle aujourd'hui classique de description d'un actif à risque comme une action, un panier d'actions, ou encore un indice comme le CAC 40 prend la forme d'une distribution d'exponentielle de normale appelée lognormale. Nous avons montré comment construire ce type de bruit blanc multiplicatif prenant la forme explicite :

$$C(t)=C_0 e^{\int_0^t r(s)\,ds} e^{N(0,\sigma\sqrt{t})-\sigma^2 t/2}$$

Voyons ce qu'il en est en pratique en considérant l'allure du CAC 40 entre le 2 septembre 2011 et le 1er septembre 2014.



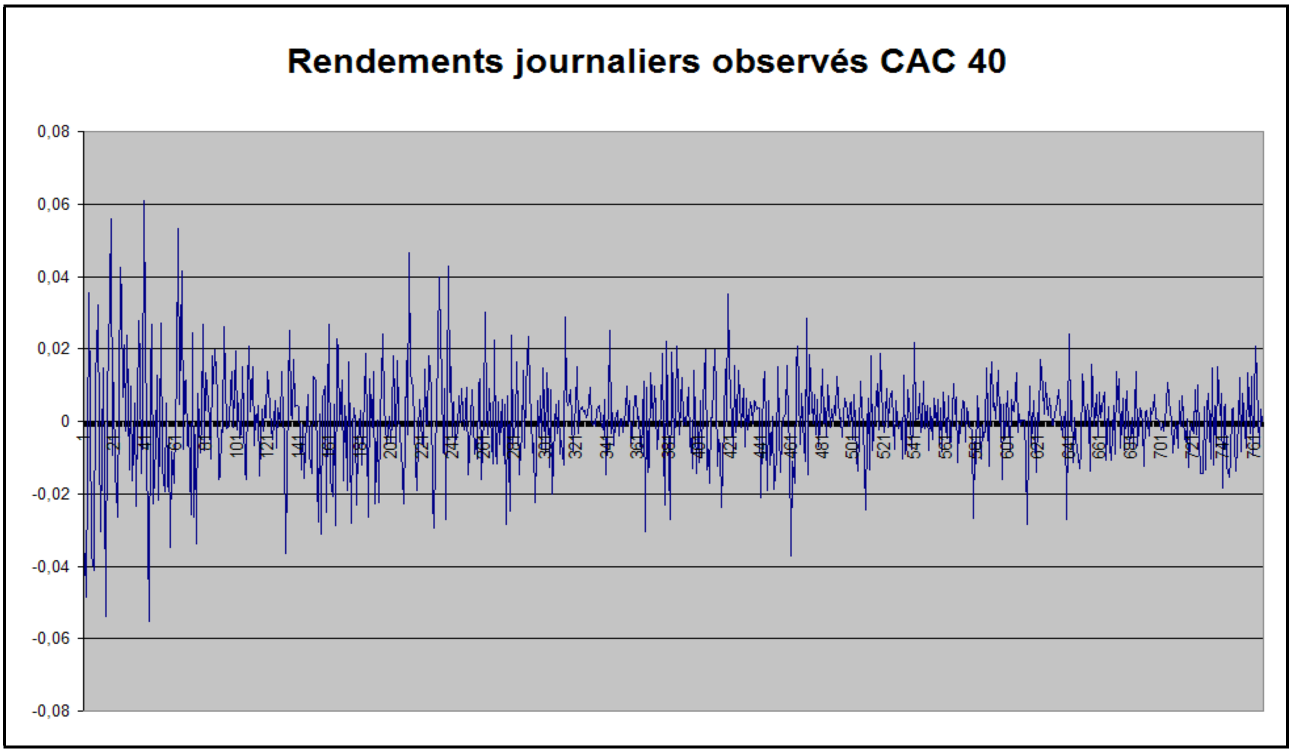
Nos observations comprennent 766 valeurs étalées sur exactement 3 ans, permettant le calcul de 765 taux journaliers. On peut en déduire que l'année boursière comprend en moyenne 255 séances de cotations par an. Considérons donc le « jour ouvrable boursier » comme unité naturelle de temps et travaillons par 1/255e d'année que nous notons Δt. Voyons ce que donne notre modèle entre un jour et son lendemain ouvrable en considérant un taux de croissance constant *r*. On a :

$$C(\Delta t)=C_0 e^{\int_0^{\Delta t} r(s)\,ds} e^{N(0,\sigma\sqrt{\Delta t})-\frac{\sigma^2\Delta t}{2}}=C_0 e^{r\Delta t} e^{N(0,\sigma\sqrt{\Delta t})-\frac{\sigma^2\Delta t}{2}}$$

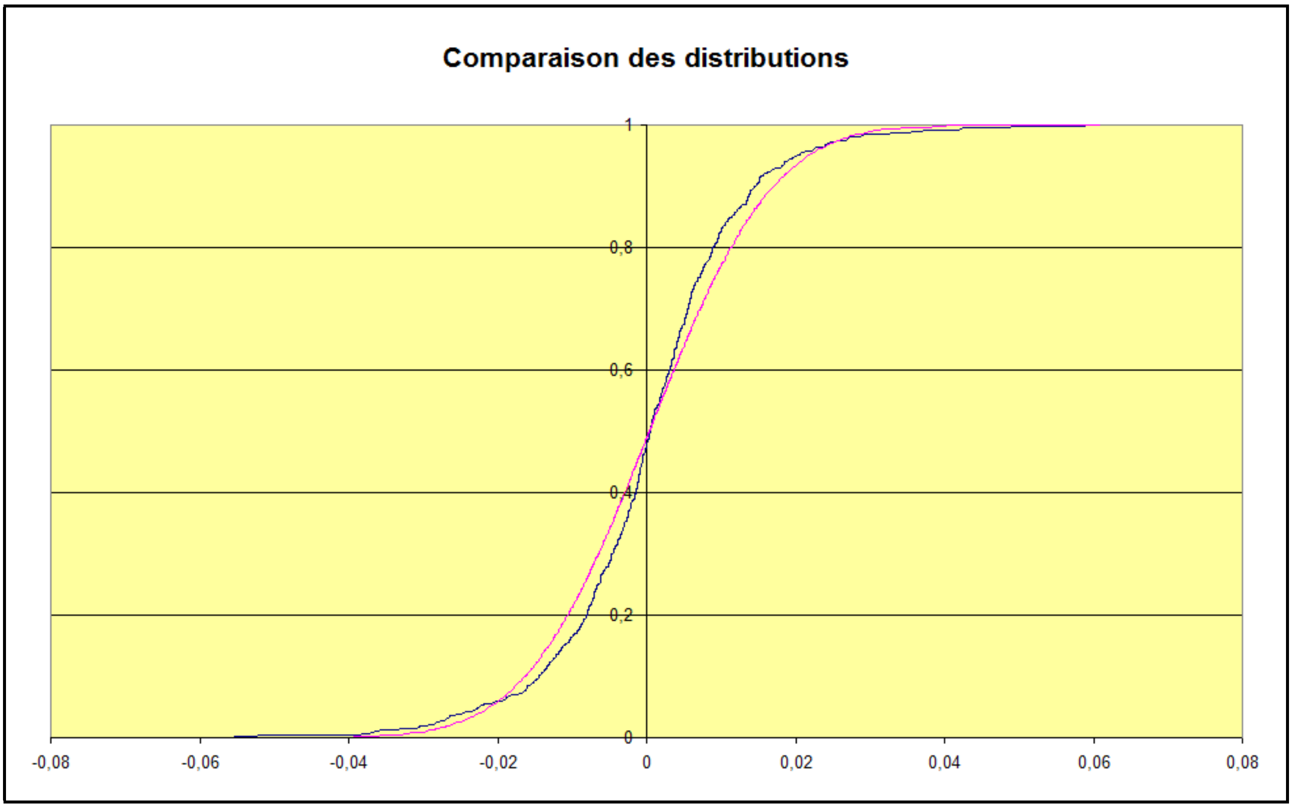
En passant aux logarithmes des quotients C(Δt)/C0, on découvre une succession de réalisations d'une distribution normale de type :

$$\ln\left[\frac{C(\Delta t)}{C_0}\right]=N\left(r\Delta t-\frac{\sigma^2\Delta t}{2,}\sigma\sqrt{\Delta t}\right)$$

Voyons ce qu'il en est en pratique. Les rendements observés sont représentés dans le graphique ci-dessous, dans lequel on remarque quelques sauts journaliers de plus de 5% :



On calcule la moyenne (0,000383124) et l'écart-type (0,013023909) de cette distribution observée. On peut alors la comparer avec une distribution normale de mêmes paramètres. Le graphique ci-dessous présente cette comparaison sous la forme des deux fonctions de répartition (à savoir F(*x*) = fréquences ou probabilités associées aux valeurs inférieures à *x*). On représente la D.N. en rose et la D.O. en bleu.



On le constate, la distribution observée ne coïncide jamais avec son modèle normal. Trois constatations peuvent être faites. Il y a trop de valeurs extrêmes (hausses ou baisses importantes), trop de valeurs centrales et trop peu de valeurs intermédiaires. Des distributions de ce type sont dites « leptokurtiques ». Ce que l'on nomme kurtosis (du grec κυρτός : courbe, arrondi, voire bossu) en calcul des probabilités est une mesure quantifiée du degré d'aplatissement de la distribution vue sous la forme de ses *densités de fréquences*. On distingue ainsi des distributions dites « mésokurtiques », qui suivent exactement une distribution normale, des distributions « platykurtiques », plus aplaties que la distribution normale, présentant donc peu de valeurs extrêmes et des flancs plus rebondis, et enfin celles qui nous intéressent, les distributions leptokurtiques dont les queues plus épaisses que la normale traduisent la présence plus fréquente de valeurs extrêmes.

Le raisonnement qui a conduit au modèle utilise le théorème central limite assurant la normalité de toutes somme d'un grand nombre de variables indépendantes de variance finie. L'hypothèse d'indépendance ne résiste pas à une analyse plus fine des observations. La plupart des acteurs de terrain sont influencés par les grands mouvements et de fortes hausses sont généralement compensées par de fortes baisses réajustant le marché. Le mécanisme traduit tout simplement les prises de bénéfices qui accroissent l'offre et diminuent les cours. On constate ainsi fin 2011 (voir graphique) une très forte volatilité des rendements journaliers observés pour lesquels les pics négatifs et positifs se succèdent. Ceci explique le nombre élevé de valeurs extrêmes et l'épaisseur anormal de la queue de courbe des densités. De plus, en période d'accalmies, les mouvements se ralentissent et les rendements se stabilisent autour de leur moyenne, ce qui explique le trop grand nombre de valeurs centrales. Les variances observées ne peuvent donc être supposées constantes. Ce phénomène porte le nom d'hétéroscédasticité et implique la non-normalité des valeurs observées.

Remarquons enfin que l'on peut malgré tout estimer les rendements et volatilités des actifs à partir des observations en identifiant moyennes et variances théoriques et observées.

$$r\,\Delta t-\frac{\sigma^2\,\Delta t}{2}=0{,}000383124\,,\ \sigma\sqrt{\Delta t}=0{,}013023909$$

dont on tire r = 0,119323502 et σ = 0,207975146. Cette dernière valeur peut être vue comme la *volatilité historique* de l'indice durant ces trois dernières années.