Construction progressive et interprétée du modèle lognormal compensé pour l'évolution des capitaux à risque

Daniel Justens

Pour comparer des successions de flux financiers échelonnés dans le temps, on introduit la notion mathématique de *fonction d'actualisation/capitalisation*. La capitalisation décrit l'évolution d'un capital après son échéance. L'actualisation avant : elle permet d'estimer la valeur *aujourd'hui* d'un capital échéant par exemple dans 6 mois. Après avoir convenu d'une unité de temps, le plus souvent l'année, on décide de son origine que l'on note t=0 et qui coïncide avec l'échéance du capital en question. Notons celui-ci C_0. Il faut construire une fonction $C(t)$ donnant la valeur de ce capital à tout moment. La première idée des mathématiciens en quête de modélisation est souvent le recours à la linéarité. Le monde de la finance n'a pas échappé à cette tentation qui conduit hélas ! à une représentation incohérente. Malgré cela, le modèle est utilisé en pratique : il s'agit de l'intérêt simple. Posons $C(t) = a + bt$. Comme on connaît la valeur du capital lors de son échéance (t = 0), on calibre $a=C_0$. Pour calibrer b, on a recours aux pratiques bancaires courantes qui proposent un intérêt aux déposants, calculé proportionnellement à la durée du placement et au capital déposé. Le facteur de proportionnalité est appelé taux d'intérêt et noté i.

On obtient la forme explicite : $C(t) = C_0 + i.C_0 t = C_0(1+it)$. L'extension de ce modèle aux réels pose problème : la valeur d'un capital positif aujourd'hui est vue comme négative dans un passé plus ou moins récent, ce qui n'a pas de sens. Cette relation est utilisée cependant quotidiennement pour des valeurs négatives de t lors de l'estimation des valeurs des lettres de change. Elle porte le nom d'*escompte simple*. On convient donc de n'utiliser le modèle linéaire qu'à court terme (moins d'un an). Pour améliorer les choses, on peut utiliser une modélisation hyperbolique pour les valeurs passées, en utilisant la relation linéaire « à l'envers », supposant $C(t)$ (t positif représentant le futur) connu et en exprimant C_0 comme fonction de $C(t)$. La modélisation strictement linéaire a d'autres défauts : même à court terme, il est impossible, en l'utilisant, de mettre en équation de manière unique un problème d'emprunt comportant plus d'un remboursement.

Mais la pratique bancaire n'a pas que de mauvais côtés. Lorsqu'un capital est replacé pendant plusieurs années dans le même organisme financier, ce dernier procède tous les ans à une recapitalisation, en ajoutant les intérêts obtenus au capital placé. Cet « ajout » se traduit en fait par un processus de type multiplicatif. Si on regarde alors, année après année, les capitaux obtenus, en faisant l'hypothèse (provisoire) d'un taux d'intérêt constant, on arrive à la suite C_0, $C(1)= C_0(1+i)$, $C(2)= C(1)(1+i) = C_0(1+i)^2$, $C(3)= C(2)(1+i) = C_0(1+i)^3$ et ainsi de suite, pour arriver à $C(n) = C_0(1+i)^n$. Le domaine de cette relation est l'ensemble des naturels mais son extension aux réels offre une représentation exponentielle qui allie simplicité et cohérence, à savoir : $C(t) = C_0(1+i)^t$.

La modélisation exponentielle va se trouver confortée par un raisonnement déductif qui ne repose que sur deux postulats : la dérivabilité de $C(t)$ et la proportionnalité des variations instantanées de capital au capital lui-même, en introduisant un nouveau coefficient de proportionnalité noté r. La deuxième condition est intuitive : le placement d'un capital deux fois plus grand doit rapporter deux fois plus. Une fonction dérivable est une fonction que l'on peut exprimer de façon « localement linéaire » : les variations de cette fonction sont donc, dans le cas qui nous occupe, localement proportionnelles au temps. En combinant nos deux conditions, on arrive à l'équation :

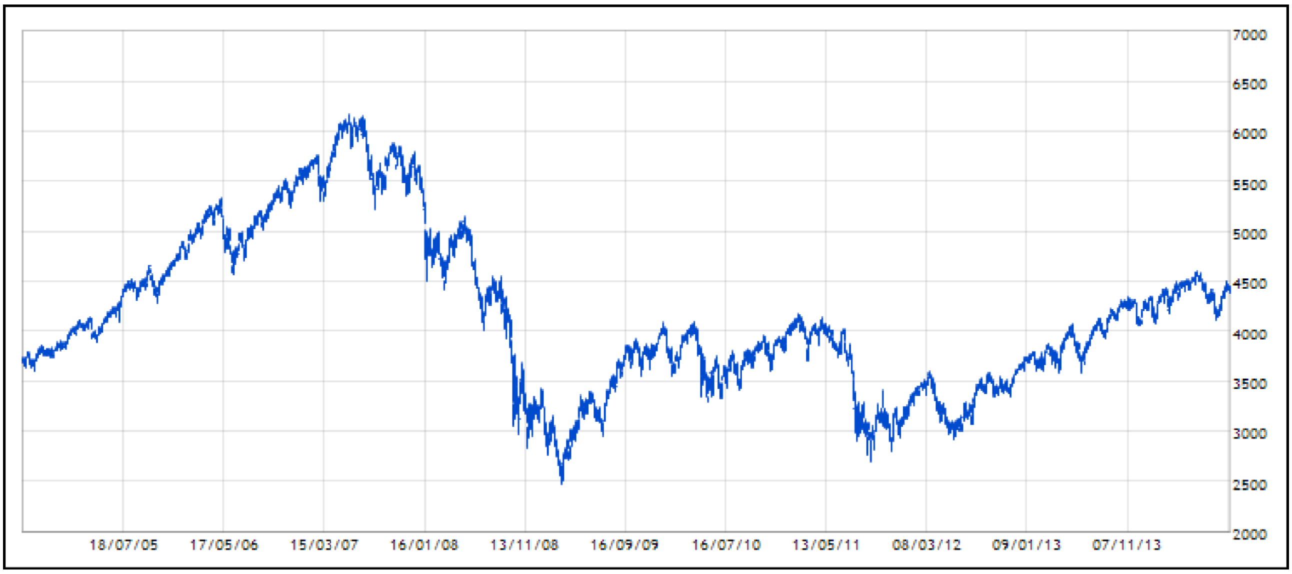
$$C(t+\Delta t)-C(t)=rC(t)\Delta t$$

Le coefficient de proportionnalité r peut être vu, par référence à la pratique de l'intérêt simple, comme un *taux instantané d'intérêt*. La solution à l'équation différentielle qui résulte de notre équation aux différences finies lorsque Δt tend vers 0, admet une solution unique : $C(t) = C_0 e^{rt}$. Le raisonnement qui précède permet également de travailler avec des taux variables, ce qui ouvre les portes à une représentation encore plus réaliste. La fonction de capitalisation/actualisation à taux variables, valable dans l'ensemble des réels, prend alors une forme un peu moins élémentaire mais bien plus réaliste :

$$C(t)=C_0 e^{\int_0^t r(s)\,ds}$$

Le passage à l'univers aléatoire

Ce dernier modèle, tout sophistiqué qu'il puisse paraître, est néanmoins insuffisant en univers aléatoire. Observons l'allure générale de l'indice CAC 40 ces 10 dernières années. On constate en effet des variations en tendance selon des taux de croissance variables et occasionnellement négatifs (crise financière de 2008), mais ces variations sont également affectées d'une sorte de vibration que les financiers baptisent « volatilité » et dont il faut donner une représentation rigoureuse et quantifiable. Comme plus haut, ce processus perturbateur doit être de type multiplicatif.



Précédons progressivement en construisant tout d'abord un *bruit blanc additif*. Pour modéliser de petites fluctuations aléatoires, on fait appel à la notion de *promenade* ou *marche aléatoire*. Une marche aléatoire décrit le trajet parcouru par une personne se déplaçant sur un axe orienté, en partant de son origine, ses pas de longueur unitaire étant effectués aléatoirement et indépendamment tantôt vers la droite (événement ω_1), tantôt vers la gauche (événement ω_2) avec probabilités identiques 0.5. Le k^e pas (k =1, 2, ... , n) est décrit par une variable aléatoire X_k définie comme suit : $X_k(\omega_1) = +1$ et $X_k(\omega_2) = -1$ avec probabilités identiques 0,5. On vérifie que l'espérance de chaque variable est nulle (ce qui définit le bruit « blanc ») et que sa variance vaut 1. La position du marcheur après n pas peut être représentée par la variable aléatoire S_n, somme des n variables aléatoires indépendantes et équidistribuées X_k. L'espérance mathématique (moyenne) de S_n est nulle et sa variance vaut :

$$V[S_n]=\sum_{k=1}^{n} V[X_k]=n$$

étant donné l'hypothèse d'indépendance. L'écart-type de la variable de position S_n est donc égal à la racine carrée du nombre de pas accomplis. Adaptons ce qui vient d'être présenté au contexte financier. Considérons un actif dont les variations à court terme au voisinage de la tendance sont aléatoires et indépendantes. Supposons que cet actif subisse toutes les minutes ou, plus généralement, toutes les Δt unités de temps, soit une augmentation (événement ω_1), soit une diminution (événement ω_2) d'une valeur identique notée Δx, les deux événements étant supposés équiprobables. Tout se passe comme si les valeurs de cet actif simplifié effectuaient une marche aléatoire au départ de sa valeur initiale X_0, de longueur de pas Δx, chaque pas étant effectué toutes les Δt unités de temps. En utilisant les mêmes notations que plus haut, la valeur de cet actif après t unités de temps ($t = n.\Delta t$) peut s'écrire :

$$X(t)=X_0+\Delta X\sum_{k=1}^{n}X_k$$

On vérifie que l'espérance de $X(t)$ est égale à X_0 : la meilleure prévision que l'on puisse donner de l'actif au temps t est égale à la valeur de cet actif à l'instant initial. C'est la notion de martingale. La variance se calcule comme plus haut :

$$V[X(t)]=\Delta X^2\sum_{k=1}^{n}V[X_k]=n\Delta X^2$$

Dans cette expression, la variable « temps » prend deux formes distinctes (n et t), reliées par la relation $t = n.\Delta t$. On peut donc écrire :

$$V[X(t)]=\frac{t}{\Delta t}\Delta X^2=\frac{\Delta X^2}{\Delta t}\times t$$

ou encore en terme d'écarts-types :

$$\sigma[X(t)]=\frac{\Delta X}{\sqrt{\Delta t}}\times\sqrt{t}=\sigma\sqrt{t}$$

C'est le facteur de la racine du temps qui définit l'intensité de la variation aléatoire qui porte le nom de volatilité et que l'on note généralement σ, avec un certain risque de confusion avec la notion d'écart-type. Les deux notions coïncident pour des valeurs unités du temps, ce qui ajoute encore à la confusion.

Voyons à présent comment construire un bruit blanc multiplicatif. Modélisons l'évolution d'un capital C_0 en univers risqué en supposant que ce dernier subit toutes les Δt unités de temps, soit une augmentation (multiplication par un nombre u supérieur à 1), soit une diminution (multiplication par un nombre d inférieur à 1). En notant Y_k ces n variables multiplicatives indépendantes et équidistribuées, on a :

$$C(t)=C_0\times\prod_{k=1}^{n}Y_k$$

Un passage aux logarithmes nous fait revenir au cas précédent ce qui va permettre de définir explicitement les variables Y_k :

$$\ln[C(t)]=\ln C_0+\sum_{k=1}^{n}\ln Y_k$$

Par analogie avec le bruit additif, on équilibre les valeurs u (up) et d (down) en postulant que $\ln u = -\ln d$ ce qui revient à poser $d=1/u$. Le passage aux logarithmes transforme la suite de multiplications en une somme de variables indépendantes à laquelle on peut appliquer le théorème central limite qui garantit la normalité de cette somme. En repassant à la description initiale, donc par l'exponentielle, on découvre alors une distribution de type « exponentielle de normale », que l'on nomme *distribution lognormale*. On peut poser provisoirement :

$$C(t)=C_0e^{N(0,\sigma\sqrt{t})}$$

Mais attention : le passage à l'exponentielle introduit un biais qu'il convient de corriger et le bruit multiplicatif que nous venons de construire n'est pas de moyenne 1 : la dissymétrie engendrée par l'exponentiation se traduit par un biais de tendance qu'il convient de corriger. On doit donc calculer :

$$E[e^{N(0,\sigma\sqrt{t})}]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma\sqrt{t}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^x e^{-1/2(\frac{x^2}{\sigma^2 t})}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma\sqrt{t}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-1/2(\frac{x^2-2\sigma^2 tx}{\sigma^2 t})}dx$$

De petites manipulations à l'exposant de e dans cette expression permettent d'arriver à :

$$E[e^{N(0,\sigma\sqrt{t})}]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma\sqrt{t}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-1/2(\frac{x^2-2\sigma^2 tx+\sigma^4t^2-\sigma^4t^2}{\sigma^2 t})}dx=e^{\sigma^2 t/2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma\sqrt{t}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-1/2(\frac{(x-\sigma^2 t)^2}{\sigma^2 t})}dx$$

Le second facteur de cette expression représente l'intégrale sur l'ensemble des réels d'une densité normale de moyenne $\sigma^2 t$ et de variance identique $\sigma^2 t$. Cette dernière vaut donc exactement 1. On en tire :

$$E[e^{N(0,\sigma\sqrt{t})}]=e^{\sigma^2 t/2}$$

Toutes ces considérations nous permettent d'arriver au processus bruit blanc multiplicatif :

$$C(t)=C_0e^{N(0,\sigma\sqrt{t})-\sigma^2 t/2}$$

En combinant ce bruit multiplicatif avec la description en tendance qui avait été obtenue en univers déterministe, on arrive enfin au modèle descriptif d'un capital à risque :

$$C(t)=C_0 e^{\int_0^t r(s)\,ds} e^{N(0,\sigma\sqrt{t})-\sigma^2 t/2}$$

que l'on peut interpréter comme suit : le premier facteur de capitalisation reprend une croissance exponentielle au taux instantanés et variables *r(s) ;* cette croissance est perturbée par un bruit blanc multiplicatif prenant la forme explicite d'une distribution lognormale compensée par son correcteur de biais.

On est bien loin de l'intérêt simple. Mais bien plus proche de la réalité complexe que les mathématiques nous aident à comprendre afin d'être capable de mieux la gérer. C'est leur rôle. Que ferions-nous sans maths ?